Кэджори Ф.

История
элементарной
математики.

1910 г.

Флоріанъ Кэджори
Докторъ Философіи
Профессоръ физики въ Колорадо Колледжѣ

ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

съ указаніями

НА МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНІЯ

Переводъ съ англійскаго
подъ редакціей, съ примѣчаніями и прибавленіями

И. Ю. Тимченко
Привать-доцента Императорскаго Новороссійскаго университета.



Одесса 1910.

ОДЕССА.
Типографія Акціон. Южно-Русскаго Общества Печатнаго Дѣла.
(Пушкинская ул., соб. д. № 18).

Предисловіе редактора

Настоящее изданіе представляетъ полный и по возможности дословный переводъ книги Кэджори „A History of Elementary Mathematics with hints on methods of teaching“. Въ иностранной литературѣ есть теперь много руководствъ по исторіи математики; нѣкоторыя изъ нихъ посвящены спеціально исторіи элементарной математики. По доступности и ясности изложенія, по обилію свѣдѣній и удачному ихъ расположенію, „Исторія“ Кэджори безспорно занимаетъ между ними первое мѣсто. Слогъ американскаго автора не всегда изященъ, но зато всегда отличается простотой и живостью. Не вдаваясь въ излишнія подробности техническаго характера, Кэджори въ большинствѣ случаевъ умѣетъ хорошо изложить сущность факта и представить его въ исторической перспективѣ. Краткіе, но выразительные педагогическіе совѣты автора придаютъ книгѣ дѣловой практическій характеръ, а умѣніе такъ же кратко и выразительно связать факты изъ исторіи науки съ общей исторіей культуры дѣлаетъ книгу интересной и для тѣхъ, кто въ сочиненіяхъ подобнаго рода ищетъ не только собранія справокъ о происхожденіи и первоначальномъ значеніи формулъ и теоремъ изъ различныхъ отдѣловъ математики, но, главнымъ образомъ, картины роста математическихъ знаній и развитія главнѣйшихъ математическихъ идей. Книга Кэджори, въ общемъ, доступна читателю, не имѣющему предварительныхъ свѣдѣній по исторіи математики; въ нѣкоторыхъ случаяхъ такія свѣдѣнія были бы очень полезны читателю для лучшаго пониманія сказаннаго въ книгѣ; авторъ ссылается на другую свою книгу, напечатанную раньше (1894 г.) подъ заглавіемъ „A History of Mathematics“, представляющую крат-

кій очеркъ исторіи математики. Русскому читателю можно рекомендовать прочесть статью *В. В. Бобынина* „Математика“ въ XVIII томѣ Энциклопедическаго Словаря Брокгауза и Ефрона (стр. 781 — 795). Въ рядѣ замѣчательныхъ статей того же автора: „Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи“ (жур. Физико-Матем. Науки т. VII, стр. 205—210, 267—308, т. VIII, стр. 28—47, 106—145) читатель найдетъ свѣдѣнія объ исторіи элементарной математики въ Россіи, о которой ничего не сказано въ книгѣ Кэджори.

Я заботился, насколько возможно, о сохраненіи характера подлинника; характеръ стиля автора, какъ мнѣ кажется, довольно хорошо сохраненъ въ переводѣ. Въ обозначеніяхъ не сдѣлано почти никакихъ измѣненій; читатель легко пойметъ нѣкоторыя особенности англійской системы обозначеній; въ нѣкоторыхъ случаяхъ сдѣланы мною соотвѣтствующія подстрочныя замѣчанія. При транскрипціи иностранныхъ именъ русскими буквами я старался о сохраненіи правильнаго произношенія, что, конечно, достигается только отчасти; иногда произношеніе передается крайне несовершенно, особенно въ англійскихъ именахъ. Въ такихъ случаяхъ въ скобкахъ помѣщено подлинное начертаніе имени. Цитаты, приведенныя у Кэджори на старомъ англійскомъ языкѣ, представляющемъ характерныя особенности, тоже приведены въ подлинникѣ рядомъ съ русскимъ переводомъ. Нѣкоторыя незначительныя ошибки, найденныя мною въ книгѣ Кэджори, исправлены надлежащимъ образомъ; иногда сдѣланы по этому поводу соотвѣтствующія подстрочныя примѣчанія; другія примѣчанія подобнаго рода сдѣланы съ цѣлью объясненія и дополненія текста. Болѣе значительныя дополненія помѣщены отдѣльно въ концѣ книги.

И. Тимченко.

Одесса, Іюль 1909 г.

Предисловіе

„Воспитаніе ребенка какъ по характеру своему, такъ и по расположенію должно соотвѣтствовать воспитанію человѣчества въ его историческомъ развитіи; другими словами, генезисъ познанія у отдѣльнаго человѣка долженъ имѣть такой же ходъ, какъ и у всей расы. Конту, полагаемъ мы, обязано общество провозглашеніемъ этой доктрины — доктрины, которую мы можемъ принять и не соглашаясь съ его теоріей генезиса познанія ни въ той ея части, которая говоритъ о причинахъ его, ни въ той, которая относится къ его порядку“ [1]). Если принципъ этотъ, котораго держались также Песталоцци и Фребель, вѣренъ, то знаніе исторіи науки, казалось бы, должно оказывать существенную помощь при преподаваніи этой науки. Но истинна ли или ложна эта доктрина, опытъ многихъ преподавателей безспорно устанавливаетъ важность исторіи математики въ преподаваніи [2]). Надѣясь оказать нѣкоторую помощь моимъ коллегамъ-преподавателямъ, я написалъ эту книгу и между строками своего разсказа помѣстилъ кое-гдѣ замѣчанія и указанія, относящіяся къ методамъ преподаванія. Безъ сомнѣнія, вдумчивый читатель извлечетъ много полезныхъ уроковъ изъ изученія исторіи математики, кромѣ тѣхъ, на которые прямо указано въ текстѣ.

При составленіи этой исторіи я широко пользовался трудами Кантора, Ганкеля, Унгера, Де Моргана, Пикока,

---

[1]) *Herbert Spencer,* Education: Intellectual, Moral, and Physical. New-York, 1894, p. 122. См. также *R. H. Quick,* Educational Reformers, 1879, p. 191.

[2]) См. *G. Heppel,* „The use of History in Teaching Mathematics“, *Nature*, Vol. 48, 1893, pp. 16—18.

Алльмана, Лоріа и другихъ выдающихся писателей въ области исторіи математики. Когда представлялась возможность, я справлялся и съ первоисточниками. Съ большимъ удовольствіемъ свидѣтельствую я о помощи, оказанной мнѣ Воспитательнымъ Бюро Соединенныхъ Штатовъ (United States Bureau of Education), препроводившимъ мнѣ для просмотра много старыхъ руководствъ, которыя иначе были бы для меня недоступны. Слѣдуетъ также упомянуть о томъ, что очень много мѣстъ въ этой книгѣ заимствовано, съ незначительными лишь перемѣнами, изъ моей *Исторіи Математики* (History of Mathematics, Macmillan & Co., 1895). Поэтому нѣкоторыя части настоящаго сочиненія не являются самостоятельными по отношенію къ старой моей книгѣ.

Особое преимущество заключалось для меня въ томъ, что рукопись моя была прочитана двумя хорошо извѣстными учеными — д-ромъ Г. Б. Хальстедомъ (H. B. Halsted) изъ Техасскаго Университета и профессоромъ Ф. Х. Лоудомъ (F. H. Loud) изъ Колорадо Колледжа. Благодаря ихъ указаніямъ и поправкамъ исчезли многія неудачныя выраженія и нѣкоторыя неточности въ приводимыхъ свѣдѣніяхъ. Цѣнную помощь при корректурѣ оказали мнѣ профессоръ Лоудъ, Mr. P. E. Doudna, бывшій Fellow in Mathematics Висконсинскаго Университета и Mr. F. K. Bailey, студентъ Колорадо Колледжа. Я приношу имъ мою искреннюю благодарность.

Florian Cajori.

Colorado College, Colorado Springs
Іюль, 1896.

СОДЕРЖАНІЕ



FLORIAN CAJORI

ИСТОРІЯ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ИСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

ДРЕВНІЙ ПЕРІОДЪ

Системы счисленія и числовые знаки.

Почти во всѣхъ системахъ счисленія какъ древнихъ, такъ и новыхъ основаніемъ служитъ одно изъ чиселъ 5, 10 или 20. Нетрудно видѣть причину этого. Когда ребенокъ учится считать, онъ пользуется для этого пальцами на своихъ рукахъ, иногда, быть можетъ, и пальцами ногъ. Точно такъ же дикари въ доисторическія времена безъ всякаго сомнѣнія считали по пальцамъ рукъ и въ нѣкоторыхъ случаяхъ по пальцамъ ногъ. Таковъ дѣйствительно и въ наше время обычай у африканцевъ, эскимосовъ и островитянъ Тихаго Океана [1]). Необходимость прибѣгать для счета къ пальцамъ рукъ часто приводила къ выработкѣ болѣе или менѣе развитой пантомимической системы счисленія, въ которой пальцами пользовались такъ же, какъ въ азбукѣ для глухонѣмыхъ [1]). Доказательства господства такой символики пальцевъ можно найти у древнихъ египтянъ, вавилонянъ, грековъ и римлянъ, а также и въ средневѣковой Европѣ; даже и теперь почти всѣ восточные народы пользуются символизмомъ пальцевъ. Китайцы выражаютъ помощью пальцевъ лѣвой руки „всѣ числа меньшія, чѣмъ 100 000; ногтемъ большого пальца прикасаются они къ каждому суставу лѣваго мизинца, проходя сначала по наружной сторонѣ его снизу вверхъ, затѣмъ посрединѣ сверху внизъ и потомъ по другой сторонѣ мизинца снизу вверхъ, выражая такимъ образомъ девять послѣдовательныхъ простыхъ единицъ; де-

[1]) *L. L. Conant* „Primitive Number-Systems," (*Smithsonian Report*, 1892, p. 584).

сятки обозначаются такимъ же образомъ на второмъ безыменномъ пальцѣ, сотни на третьемъ, тысячи на четвертомъ и десятки тысячъ на большомъ пальцѣ. Стоило бы только перейти съ лѣвой руки на правую, чтобъ распространить эту систему нумераціи на большія числа" [1]). Этотъ символизмъ пальцевъ настолько распространенъ, что, говорятъ, купцы сообщаютъ другъ другу условія купли и продажи, беря другъ друга за руку и скрывая при этомъ плащами свои дѣйствія отъ постороннихъ зрителей.

Еслибы число пальцевъ на рукахъ и ногахъ у человѣка было другое, иныя были бы, конечно, и господствующія во всемъ мірѣ системы счисленія; рости на рукахъ у каждаго человѣка еще по одному пальцу, цивилизованные народы приняли бы за основаніе счета не десятокъ, а дюжину.

Потребовалось бы тогда ввести два новыхъ символа для обозначенія чиселъ 10 и 11. Можно пожалѣть, разумѣется только въ интересахъ ариѳметики, что на рукѣ у человѣка нѣтъ шестого пальца. Конечно, пришлось бы пользоваться еще двумя лишними числовыми знаками и пришлось бы выучить таблицу умноженія до 12×12, но зато система счета дюжинами рѣшительно превосходитъ десятичную: у числа 12 есть четыре дѣлителя 2, 3, 4, 6, между тѣмъ какъ у десяти ихъ только два, 2 и 5. Въ обыденныхъ дѣловыхъ сношеніяхъ часто употребляются дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, и поэтому очень удобно въ основаніи системы счисленія имѣть число кратное 2, 3 и 4. Однимъ изъ ревностныхъ защитниковъ двѣнадцатиричной нумераціи былъ шведскій король Карлъ XII, который передъ самой своей смертью собирался замѣнить въ своихъ владѣніяхъ десятичную систему двѣнадцатиричной [2]). Но едва ли произойдетъ когда-нибудь такая замѣна. Десятичная система укоренилась уже такъ крѣпко, что даже и въ то время, когда буря французской

---

[1]) *George Peacock*, въ статьѣ „Arithmetic" въ *Encyclopaedia Metropolitana* (The Encyclopaedia of Pure Mathematics), p. 394. Намъ придется и впослѣдствіи приводить цитаты изъ этой замѣчательной статьи; мы будемъ обозначать ее просто именемъ автора *Peacock*.

[2]) *Conant* цит. соч. p. 589.

революціи смела съ лица земли другія древнія установленія, десятичная система не только осталась непоколебимой, но положеніе ея еще болѣе, чѣмъ когда-либо, упрочилось. Преимущества числа двѣнадцать, какъ основанія счета, были признаны лишь тогда, когда ариѳметика развилась настолько, что стала невозможной какая либо перемѣна въ системѣ нумераціи. „Это одинъ изъ нерѣдкихъ примѣровъ того, какъ высшая цивилизація хранитъ очевидные слѣды грубости своего происхожденія отъ древней дикой жизни" [1]).

Изъ числа обозначеній, основанныхъ на устройствѣ человѣческаго тѣла, пятиричная и двадцатиричная системы наиболѣе часто встрѣчаются у низшихъ расъ, тогда какъ стоящіе выше народы обыкновенно избѣгали первой изъ этихъ системъ какъ слишкомъ скудной, второй, какъ слишкомъ громоздкой, предпочитая занимающую среднее между ними положеніе десятичную систему [2]). Не всѣ народы держались всегда послѣдовательно одной и той же системы. Такъ, въ пятиричной системѣ послѣдовательными высшими единицами должны были бы быть числа 5, 25, 125, 625, и т. д., однако такого рода послѣдовательно развитая пятиричная система въ дѣйствительности никогда не употреблялась: для выраженія большихъ чиселъ всегда переходили къ десятичной или двадцатиричной системѣ. „Родиной пятиричной или скорѣе пятирично-двадцатиричной системы является, по преимуществу, Америка. Употребленіе этой системы распространено между всѣми эскимосскими племенами въ арктическихъ странахъ. Она господствовала среди значительной части индійскихъ племенъ Сѣверной Америки и пользовалась почти всеобщимъ распространеніемъ среди туземныхъ расъ Центральной и Южной Америки" [3]). Этой системой пользова-

[1]) *E. B. Tylor,* Primitive culture, New York, 1889, vol. I, p. 272. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ система счисленія, основанная на степени числа 2—напримѣръ, съ основаніемъ 8 или 16—превосходитъ двѣнадцатиричную систему. Однако основанія эти имѣютъ тотъ недостатокъ, что не дѣлятся на 3. См. *W. W. Johnson.* „Octonary Numeration." *Bull. N. Y. Math. Soc.,* 1891, vol. I, pp. 1—6.

[2]) *Tylor* цит. соч. vol. I, p. 262.

[3]) *Conant* цит. соч. p. 592. Дальнѣйшія свѣдѣнія можно найти также въ сочиненіяхъ: *Pott,* Die quinäre und vigesimale Zählmethode

лись также многія племена въ Сѣверной Сибири и въ Африкѣ. Слѣды ея можно найти и въ языкахъ народовъ, которые употребляютъ нынѣ десятичную систему, напримѣръ, въ гомеровскомъ діалектѣ греческаго языка. Римскія числовыя обозначенія обнаруживаютъ слѣды той же системы; именно, I, II, ... V, VI, ... X, XI, ... XV и т. д.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то любопытное обстоятельство, что пятиричная система такъ часто поглощается двадцатиричной; дикари переходили, повидимому, отъ числа пальцевъ на одной рукѣ, какъ высшей единицы или мѣста остановки при счетѣ, къ общему числу пальцевъ на рукахъ и ногахъ, какъ высшей единицѣ или остановочному пункту. Двадцатиричная система менѣе распространена, чѣмъ пятиричная, но, какъ и эта послѣдняя, никогда не встрѣчается въ чистомъ видѣ. Въ этой системѣ единицами четырехъ первыхъ послѣдовательныхъ разрядовъ являются 20, 400, 8000, 160000; особыя названія для этихъ чиселъ дѣйствительно встрѣчаются у племени Майя въ Юкатанѣ. Переходъ отъ пятиричной къ двадцатиричной системѣ виденъ въ нумераціи Ацтековъ, которую можно представить такъ: 1, 2, 3, 4, 5, 5+1, ..., 10, 10+1, ..., 10+5, 10+5+1, ..., 20, 20+1, ..., 20+10, 20+10+1, ..., 40, и т. д.[1]) Особыя слова существуютъ при этомъ для выраженія чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40 и т. д. Двадцатиричная система процвѣтала въ Америкѣ, но рѣдко встрѣчалась въ Старомъ Свѣтѣ. Остатки ея, наслѣдіе Кельтовъ, встрѣчаются во французскихъ словахъ *quatre-vingts* (4×20 или 80), *six-vingts* (6×20 или 120), *quinze-vingts* (15×20 или 300). Слѣдуетъ замѣтить также англійское слово *score* въ такихъ выраженіяхъ какъ *three-score years and ten* (семьдесятъ лѣтъ, 70=20×3+10).

Изъ трехъ системъ, основанныхъ на устройствѣ человѣческаго тѣла, преобладаетъ десятичная система, преобладаетъ, дѣйствительно, настолько, что по древнему преданію ею пользовались народы всего міра. Только въ послѣдніе

---

bei Völkern aller Welttheile, Halle, 1847; *Pott,* Die Sprachverschiedenheit in Europa an den Zahlwörtern nachgewiesen sowie die quinäre und vigesimale Zählmethode, Halle 1868.

[1]) *Tylor,* цит. соч., vol. I, p. 262.

нѣсколько столѣтій открыты были двѣ другія системы среди неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ племенъ[1]). Числомъ десять, какъ основаніемъ нумераціи, пользовалась большая часть индійскихъ племенъ въ Сѣверной Америкѣ, въ Южной же Америкѣ десятичная система употреблялась рѣдко.

При построеніи десятичной системы, при пользованіи для счета пальцами обѣихъ рукъ, число ихъ 10 являлось первымъ остановочнымъ пунктомъ въ процессѣ счета, а также первою высшею единицею. Всякое число между 10 и 100 произносилось по формулѣ $b(10)+a(1)$, гдѣ a и b цѣлыя числа, меньшія чѣмъ 10. Число 110 можно выразить двоякимъ образомъ: (1) какъ $10\times10+10$, (2) какъ 11×10. Второй способъ выраженія не казался бы неестественнымъ въ тѣхъ языкахъ, въ которыхъ существуетъ особое названіе для числа 11, какъ напримѣръ, въ нѣмецкомъ и англійскомъ языкахъ. Почему бы, по аналогіи съ нѣмецкими словами *achtzig* и *neunzig*, англійскими — *eigthy, ninety,* не говорить *elfzig* или *eleventy* вмѣсто *hundert und zehn, hundred and ten?* Но съ выборомъ между $10\times10+10$ и 11×10 связанъ вопросъ о планомѣрномъ построеніи системы нумераціи [2]). Къ счастью, всѣ народы, развивавшіе десятичную систему нумераціи, были приведены къ выбору перваго способа выраженія [3]); съ единицей 10 обращались такъже, какъ и съ низшей единицей 1, при выраженіи чиселъ меньшихъ, чѣмъ 100. Всякое число между 100 и 1000 выражалось по формулѣ $c(10)^2+b(10)+a$, гдѣ a, b, c—цѣлыя числа, меньшія чѣмъ 10. Подобнымъ же образомъ, для чиселъ меньшихъ, чѣмъ 10 000, служила формула $d(10)^3+c(10)^2+b(10)^1+a(10)^0$, и такъ далѣе для чиселъ, еще большихъ.

Переходя къ описанію числовыхъ *обозначеній,* мы начнемъ съ вавилонянъ. Клинообразное письмо, равно какъ и

---

[1]) *Conant* цит. соч., p. 588.

[2]) *Hermann Hankel.* Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig, 1874, p. 11. Мы будемъ впослѣдствіи цитировать это блестящее произведеніе Ганкеля лишь по имени автора: *Hankel.*

[3]) Въ связи съ этимъ вопросомъ слѣдуетъ прочесть также страницы 6 и 7 въ книгѣ: *Moritz Cantor.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I (2-е изданіе), Leipzig 1894. Это сочиненіе, въ трехъ томахъ, написанное знаменитѣйшимъ изъ историковъ математики нашего времени, мы будемъ цитировать впослѣдствіи какъ *Cantor.*

сопровождающая его система обозначенія чиселъ, были по всей вѣроятности придуманы древними обитателями Вавилоніи, сумерійцами. Вертикальный клинъ 𒁹 изображалъ единицу, тогда какъ знаки 𒌋 и 𒁹𒀸 обозначали соотвѣтственно 10 и 100. Для выраженія чиселъ, меньшихъ 100, значенія отдѣльныхъ символовъ подвергались *сложенію*. Такъ 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 означаетъ 23, 𒌋𒌋𒌋 — 30. Знаки, имѣющіе высшее значеніе, пишутся налѣво отъ низшихъ. Но при письменномъ изображеніи сотенъ меньшій символъ ставился передъ символомъ 100 и значеніе перваго *умножалось* на 100. Такъ, 𒌋 𒁹𒀸 означало 10×100 или 1000. Принимая этотъ сложный знакъ, какъ изображеніе новой единицы, обозначеніе 𒌋 𒌋 𒁹𒀸 относили не къ числу 20×100, а къ 10×1000. Въ этой системѣ обозначенія не найдено чиселъ, доходящихъ до милліона [1]). Въ такой системѣ обозначеній два принципа: принципъ *сложенія* и принципъ *умноженія*. Кромѣ того, у вавилонянъ была другая письменная система нумераціи, шестидесятичная, о которой будетъ сказано ниже.

Съ египетскими способами обозначенія чиселъ ознакомились послѣ того, какъ научились читать іероглифы, благодаря открытіямъ Шампольона, Юнга и другихъ. Древніе египтяне пользовались слѣдующими іероглифическими обозначеніями чиселъ: 𓏺 (1), 𓎆 (10), 𓍢 (100), 𓆼 (1000), 𓂭 (10 000), 𓆐 (100 000), 𓁨 (1 000 000), 𓍿 (10 000 000). Знакъ для единицы изображаетъ вертикальный жезлъ, знакъ для 10 000—указывающій палецъ; знакъ для 100 000—налима (*); для 1 000 000 — человѣка, въ удивленіи подымающаго руки. Нельзя съ увѣренностью объяснить значенія другихъ символовъ. Эти числовые знаки, какъ и другіе іероглифы, очевидно представляли собой изображенія животныхъ или предметовъ, которые часто встрѣчались въ обиходѣ древнихъ египтянъ и видъ которыхъ могъ навести нѣкоторымъ образомъ на мысль о понятіи, изображаемомъ знакомъ. Они служатъ прекрасными примѣрами идеографическаго, картин-

---

[1]) Болѣе полное изложеніе вавилонской системы можно найти въ сочиненіи: *Moritz Cantor*. Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863, pp. 22—38.

(*) Или лягушку, головастика. *Прим. ред.*

наго письма. Всѣ сложные числовые знаки у египтянъ строились исключительно на основаніи принципа *сложенія*. Такъ, [hieroglyphs] означаетъ 111.

Іероглифы находятъ на памятникахъ, обелискахъ и на стѣнахъ храмовъ. Кромѣ іероглифовъ, у египтянъ было еще *іератическое* письмо и *демотическое*, какъ предполагаютъ, выродившіяся формы іероглифовъ, развившіяся вслѣдствіе продолжительнаго ихъ употребленія и попытокъ скораго письма. Для изображенія чиселъ существовали слѣдующіе іератическіе знаки[1]:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,

100, 200, 1000, 9000

Такъ какъ существуетъ больше іератическихъ символовъ, чѣмъ іероглифическихъ, то число можно было изображать короче съ помощью іератическихъ знаковъ. И тѣми и другими управляетъ принципъ сложенія, и символы большихъ чиселъ всегда предшествуютъ символамъ меньшихъ.

Около того времени, когда жилъ Солонъ, греки употребляли для обозначенія чиселъ начальныя буквы числительныхъ именъ. Эти знаки называются часто *Геродіановыми знаками* (по имени Геродіана, византійскаго грамматика, жившаго около 200 г. по Р. Х., который ихъ описалъ). Они называются также *Аттическими*, такъ какъ часто встрѣчаются въ Аѳинскихъ надписяхъ. У финикіянъ, сирійцевъ и евреевъ въ это время были алфавиты, буквами

---

[1]) *Cantor*, Vol. I, pp. 44 и 45. Приведенные іератическіе числовые знаки заимствованы изъ таблицы, приложенной въ концѣ перваго тома сочиненія Кантора.

которыхъ сирійцы и евреи пользовались для обозначенія чиселъ. Греки стали слѣдовать тому же обычаю около 500 г. до Р. Х. Буквы греческаго алфавита, вмѣстѣ съ тремя болѣе древними буквами ς ϙ ϡ и символомъ М, служили для изображенія чиселъ. Для чиселъ 1 — 9 употреблялись буквы α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, ϑ; для десятковъ 10 — 90, ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϙ, для сотенъ 100 — 900, ϱ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ, для обозначенія тысячъ греки писали ,α, ,β, ,γ, ,δ, ,ε, и т. д.; для 10000, М; для 20000, $\overset{\beta}{M}$; для 30000, $\overset{\gamma}{M}$, и т. д. Замѣна аттическихъ знаковъ алфавитными была несомнѣнно къ худшему, потому что старая система была менѣе обременительна для памяти. Въ греческихъ грамматикахъ часто указываютъ на то, что буквы, обозначавшія числа, снабжались удареніями, въ отличіе отъ буквъ, составлявшихъ слова, но на самомъ дѣлѣ обыкновенно этого не дѣлали, а проводили, съ той же цѣлью, горизонтальную черту надъ изображеніемъ числа, удареніемъ же обозначали чаще всего соотвѣтствующую долю единицы, такъ $\delta' = \frac{1}{4}$ [1]). Греки прилагали къ построенію числовыхъ символовъ принципъ сложенія, а въ такихъ случаяхъ, какъ $\overset{\varepsilon}{M}$ для изображенія 50 000, примѣнялся и принципъ умноженія.

Въ римскомъ обозначеніи мы встрѣчаемъ кромѣ принципа сложенія еще принципъ вычитанія. Если буква поставлена передъ другою, имѣющей бо́льшее числовое значеніе, то значеніе первой буквы слѣдуетъ вычесть изъ значенія второй. Такъ IV=4, тогда какъ VI=6. Хотя принципъ этотъ не былъ найденъ ни въ какой другой системѣ *обозначеній*, онъ встрѣчается иногда въ устной *нумераціи*. Такъ, по латыни *duodeviginti* означаетъ — безъ двухъ двадцать, или 18 [2]). Полагаютъ, что римскіе числовые знаки этрусскаго происхожденія.

---

[1]) *Dr. G. Friedlein.* Die Zahlzeichen und das Elementare Rechnen der Griechen und Römer. Erlangen, 1869, p. 13. Мы будемъ впослѣдствіи цитировать это сочиненіе какъ *Friedlein.* См. также *Dr. Siegmund Günther* въ Handbuch der Klassischen Altertumswissenschaft. *Мюллера,* Bd. V, Abth. I, 1888 p. 9.

[2]) *Cantor.* Vol. I, pp. 11 и 489.

Такимъ образомъ, въ вавилонской, египетской, греческой, римской и другихъ древнихъ десятичныхъ системахъ обозначенія числа выражаются съ помощью немногихъ знаковъ или символовъ, которые сочетаются либо исключительно по принципу сложенія, либо посредствомъ сложенія вмѣстѣ съ умноженіемъ или вычитаніемъ. Но ни въ одной изъ этихъ десятичныхъ системъ не находимъ мы примѣненія важнѣйшаго принципа письменной нумераціи, которой мы пользуемся теперь,—принципа положенія, или помѣстнаго значенія числовыхъ знаковъ. Не зная этого принципа и связаннаго съ нимъ употребленія особаго символа для представленія нуля, древніе были очень далеки отъ идеальной системы числовыхъ обозначеній. Въ дѣлѣ изобрѣтенія такой системы даже греки и римляне не могли сдѣлать того, что такъ удивительно хорошо было выполнено далекимъ азіатскимъ народомъ, мало извѣстнымъ европейцамъ до начала девятнадцатаго столѣтія. Но прежде, чѣмъ мы будемъ говорить объ индусахъ, мы должны упомянуть объ одной древней вавилонской системѣ обозначенія, которая, странно сказать, не построена ни на одномъ изъ основаній 5, 10 или 20 и въ которой, кромѣ того, почти вполнѣ воплотился идеальный принципъ, отсутствующій въ другихъ системахъ. Мы говоримъ о *шестидесятичномъ* обозначеніи.

Вавилоняне пользовались этимъ обозначеніемъ главнымъ образомъ для построенія системы вѣсовъ и мѣръ. Систематическое развитіе шестидесятичнаго счисленія въ приложеніи какъ къ цѣлымъ числамъ, такъ и къ дробямъ, показываетъ, на какой высокой степени математическихъ знаній и способностей стояли древніе сумерійцы. Обозначенія, о которыхъ идетъ рѣчь, были найдены на двухъ вавилонскихъ плиткахъ. Одна изъ нихъ, происхожденіе которой вѣроятно относится къ 1600 или 2300 г. до Р. Х., содержитъ таблицу квадратныхъ чиселъ до 60^2. Первыя семь такихъ чиселъ суть 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Затѣмъ въ таблицѣ стоятъ знаки, соотвѣтствующіе формуламъ $1.4=8^2$, $1.21=9^2$, $1.40=10^2$, $2.1=11^2$, и т. д. Формулы эти дѣлаются понятными только тогда, когда мы допускаемъ, что число

шестьдесятъ служило основанiемъ нумерацiи, такъ что 1.4 означаетъ 60+4, 1.21=60+21, и т. д. Во второй таблицѣ приведены величины освѣщенной части луннаго диска для каждаго дня отъ новолунiя до полнолунiя, причемъ полный дискъ предполагается раздѣленнымъ на 240 частей. Освѣщенныя части въ теченiе первыхъ пяти дней составляютъ рядъ 5, 10, 20, 40, 1.20(=80). Здѣсь снова обнаруживается шестидесятичная система, а также нѣкоторыя свѣдѣнiя о геометрическихъ прогрессiяхъ. Далѣе рядъ превращается въ ариѳметическую прогрессiю: числа, соотвѣтствующiя слѣдующихъ днямъ, отъ пятаго до пятнадцатаго, суть слѣдующiя, 1.20, 1.36, 1.52, 2.8, 2.24, 2.40, 2.56, 3.12, 3.28, 3.44, 4. Этой шестидесятичной системой счисленiя управляетъ такимъ образомъ принципъ помѣстнаго значенiя. Такъ, въ обозначенiи 1.4(=64) знакъ 1 означаетъ 60, единицу втораго разряда, въ силу положенiя его по отношенiю къ знаку 4. Такимъ образомъ вавилоняне пользовались, до нѣкоторой степени, принципомъ положенiя, быть можетъ, еще за 2000 лѣтъ до того, какъ примѣненiе его достигло полнаго своего развитiя у индусовъ. Это было въ тѣ времена, когда ни Ромулъ и Ремъ, ни даже Ахиллъ, Менелай и Елена не были еще извѣстны въ исторiи и поэзiи. Но полное развитiе принципа положенiя предполагаетъ введенiе особаго символа, представляющаго отсутствiе всякаго количества, или нуля. Былъ ли у вавилонянъ такой символъ? Разобранныя до сихъ поръ древнiя плитки не даютъ на это отвѣта; въ нихъ нѣтъ числа, для обозначенiя котораго приходилось бы пользоваться нулемъ. Все указываетъ до сихъ поръ на то, что описанная нами система обозначенiй была достоянiемъ немногихъ, и что пользовались ею мало. Тогда, какъ шестидесятичное дѣленiе единицъ времени и круговыхъ мѣръ перешло къ другимъ народамъ, къ блестящей по своему остроумiю идеѣ помѣстнаго значенiя символовъ въ числовыхъ обозначенiяхъ отнеслись съ пренебреженiемъ и забыли ее.

Что внушило вавилонянамъ мысль выбрать число шестьдесятъ за основанiе системы счисленiя? Причина такого выбора не могла находиться въ связи съ устройствомъ чело-

вѣческаго тѣла, какъ въ случаѣ другихъ системъ нумераціи. Канторъ[1]) и другіе предлагаютъ воспользоваться временно слѣдующимъ объясненіемъ: вавилоняне считали вначалѣ въ году 360 дней. Это привело къ раздѣленію окружности круга на 360 градусовъ, каждый изъ которыхъ представлялъ соотвѣтствующую суткамъ долю предполагаемаго годичнаго обращенія солнца вокругъ земли. Вѣроятно они знали, что радіусъ можно разсматривать, какъ хорду, соотвѣтствующую шестой части окружности, содержащей, такимъ образомъ, 60 градусовъ. Это могло внушить имъ мысль о дѣленіи на 60 частей. Когда понадобилась бóльшая точность въ измѣреніи, каждый градусъ былъ раздѣленъ на 60 равныхъ частей или минутъ. Такимъ путемъ и могло возникнуть шестидесятичное счисленіе. (*) Раздѣленіемъ дня на 24 часа, а часа на минуты и секунды по шестидесятичной системѣ мы обязаны вавилонянамъ. Существуютъ также указанія на то, что имъ были извѣстны шестидесятичныя *дроби* [2]), такія же, какъ и тѣ, которыми пользовались позднѣе греки, арабы и европейскіе ученые въ средніе вѣка и даже въ позднѣйшія времена.

Вавилонская наука оставила свой отпечатокъ на современной цивилизаціи. Каждый разъ, какъ землемѣръ записываетъ отсчеты, сдѣланные имъ на раздѣленномъ кругѣ угломѣрнаго инструмента, каждый разъ, какъ современный человѣкъ замѣчаетъ время дня по часамъ, онъ, можетъ быть и безсознательно, но несомнѣнно платитъ долгъ своей зависимости отъ древнихъ астрономовъ на берегахъ Евфрата.

Полное развитіе нашего десятичнаго обозначенія принадлежитъ сравнительно недавнимъ временамъ. Десятичное обозначеніе находилось въ употребленіи тысячи

---

[1]) Vol. I, pp. 91–93.

(*) **Въ послѣднее время ассиріологи стали сомнѣваться въ справедливости такого объясненія и вообще въ астрономическомъ происхожденіи шестидесятичной системы. Вопреки мнѣнію автора, я полагаю, что шестидесятичная система связана именно съ устройствомъ человѣческой руки. См. прибавленіе въ концѣ книги.** ***Прим. ред.***

[2]) *Cantor,* Vol. I, p. 85.

лѣтъ, прежде чѣмъ замѣтили, что его простота и связанныя съ нимъ выгоды могли бы быть увеличены въ огромной мѣрѣ принятіемъ принципа положенія. Индусамъ, жившимъ въ пятомъ или шестомъ столѣтіяхъ по Р. Х., мы обязаны вторичнымъ открытіемъ этого принципа, а также и изобрѣтеніемъ и принятіемъ въ систему числовыхъ знаковъ нуля, символа отсутствія количества. Изъ всѣхъ математическихъ открытій ни одно не способствовало болѣе этого общему прогрессу умственнаго развитія. Тогда, какъ болѣе старыя обозначенія служили только для записыванія результата ариѳметическаго вычисленія, индусская система обозначенія (которую ошибочно называютъ арабской) способствуетъ съ удивительной силой самому выполненію вычисленія. Чтобы провѣрить справедливость этого замѣчанія, попробуйте умножить 723 на 364, выражая сначала эти числа по римской системѣ обозначенiи; т. е. умножьте DCCXXIII на CCCLXIV. Эти обозначенія помогутъ вамъ мало, а то и совсѣмъ не помогутъ: римляне, для выполненія такихъ вычисленій, принуждены были обращаться къ помощи счетной доски или абака.

Очень мало извѣстно о томъ, какъ развивалось индусское обозначеніе. Существуютъ историческія свидѣтельства, позволяющія намъ вѣрить, что индусская система обозначеній второго вѣка по Р. Х. не заключала въ себѣ ни нуля, ни принципа помѣстнаго значенія. На островѣ Цейлонѣ сохранился способъ обозначенія чиселъ, похожій на индусскій, но безъ нуля. Извѣстно, что культура Индіи была перенесена на островъ Цейлонъ вмѣстѣ съ буддизмомъ около третьяго вѣка и съ тѣхъ поръ оставалась тамъ въ неподвижномъ состояніи. Поэтому въ высокой степени вѣроятно, что цейлонское обозначеніе представляетъ собою старую индусскую систему въ ея несовершенномъ видѣ. Кромѣ знаковъ для 1—9, въ цейлонскомъ обозначенiи есть отдѣльные символы для каждаго числа десятковъ и для 100 и 1000. Такъ, число 7685 можно было бы написать по цейлонской системѣ съ помощью шести символовъ, обозначающихъ соотвѣтственно числа 7, 1000, 6, 100, 80, 5. Предполагаютъ, что эти, такъ называемые сингалезскіе знаки

были первоначально, какъ и старые индусскіе числовые знаки, иниціалами соотвѣтствующихъ числительныхъ именъ [1]). Эти иниціалы различны для девяти первыхъ санскритскихъ числительныхъ, такъ что при употребленіи ихъ не могло возникнуть никакихъ недоразумѣній. Въ теченіе вѣковъ начертанія индусскихъ буквъ претерпѣли существенныя измѣненія, но буквы, которыя, повидимому, больше всего походятъ на apices Боэтія или на западно-арабскіе числовые знаки (съ которыми мы встрѣтимся позднѣе), суть буквы второго вѣка.

У индусовъ было нѣсколько различныхъ способовъ обозначенія чиселъ. Для болѣе полнаго ознакомленія съ ними мы отсылаемъ читателя къ сочиненію Кантора. Арьябхатта въ своемъ знаменитомъ математическомъ трудѣ (написанномъ около начала шестого столѣтія) даетъ обозначеніе, которое по своему принципу походитъ на старую сингалезскую систему, но указанія, которыя даетъ онъ на то, какъ извлекать квадратные и кубическіе корни, заставляютъ предполагать, что ему былъ извѣстенъ принципъ положенія. Какъ кажется, нуль и принципъ положенія были введены именно около того времени, когда жилъ Арьябхатта.

Индусы иногда находили удобнымъ пользоваться *символической системой положенія*, въ которой единица могла быть выражена словомъ „луна“ или „земля“, 2—„глазъ“ и т. д. Въ *Сурья-сиддханта*[2]) (руководство къ индусской астрономіи) число 1577917828 дано слѣдующимъ образомъ: Вазу (классъ божествъ числомъ 8) — два — восемь — гора (7 миѳическихъ цѣпей горъ) — форма — фигура (9 первыхъ чиселъ) — семь — гора — лунные дни (которыхъ приходится 15 въ половинѣ мѣсяца). Этотъ способъ обозначенія чиселъ, конечно, очень интересенъ; имъ, повидимому, пользовались, какъ особымъ мнемотехническимъ пріемомъ для запоминанія датъ и большихъ чиселъ. Такой выборъ синонимовъ позволялъ съ бóльшей легкостью придумывать фразы или непонятные

[1]) *Cantor,* vol. I, pp. 563–566.

[2]) The Surya — siddhanta, translated by *E. Burgess*, and annotated by *W. D. Whitney,* New Haven, 1860, p. 3.

стихи для искусственнаго запоминанія чиселъ. Мы полагаемъ, что можно было бы не безъ пользы примѣнить эту идею, конечно въ ограниченной мѣрѣ, къ обученію дѣтей.

Индусская система числовыхъ обозначеній, въ своемъ наиболѣе развитомъ видѣ, проникла въ Европу въ двѣнадцатомъ вѣкѣ. Она перешла на западъ черезъ посредство арабовъ, откуда произошло и самое названіе „арабское обозначеніе". Нельзя обвинять арабовъ въ распространеніи этого ложнаго названія; они всегда признавали, что обозначеніе это — наслѣдіе индусовъ. Въ теченіе тысячи лѣтъ, предшествовавшихъ 1200 г. по Р. Х., индусскіе числовые знаки и числовыя обозначенія, проходя различныя ступени своего развитія, переносились, вмѣстѣ съ тѣмъ, изъ одной страны въ другую. Каковы были въ точности эти переселенія — задача, которую чрезвычайно трудно рѣшить. Даже и объ авторствѣ писемъ Юнія не такъ много спорили и разсуждали, какъ объ этомъ вопросѣ [1]). Факты, которые приходится объяснить и привести въ согласіе, таковы:

1. Когда, приблизительно къ концу восемнадцатаго столѣтія, ученые постепенно убѣдились въ томъ, что наши числовые знаки не арабскаго, а индусскаго происхожденія, между ними была широко распространена увѣренность въ томъ, что арабскіе числовые знаки не отличаются существенно отъ индусскихъ. Велико было ихъ удивленіе, когда былъ открытъ рядъ арабскихъ знаковъ, такъ называемыхъ *знаковъ Губаръ,* изъ коихъ нѣкоторые не имѣли *рѣшительно никакого* сходства съ современными индусскими цифрами, называемыми знаками *Деванагари.*

2. Болѣе внимательное изслѣдованіе показало, что числовые знаки багдадскихъ арабовъ *отличались* отъ знаковъ, употреблявшихся арабами въ Кордовѣ, и при томъ въ такой мѣрѣ, что трудно было повѣрить, чтобы западные арабы получили свои цифры непосредственно отъ своихъ восточныхъ сосѣдей. Восточно-арабскіе символы и были тѣ знаки

---

[1]) См. *Treutlein.* Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten über dieselbe, Carlsruhe, 1875; *Siegmund Günther,* Ziele und Resultate der neueren mathematisch — historischen Forschung, Erlangen, 1876, примѣчаніе 17.

Губаръ, о которыхъ мы упомянули выше. Можно прослѣдить употребленіе арабскихъ цифръ до десятаго вѣка; доказательствъ болѣе ранняго ихъ употребленія не найдено.

3. Какъ восточные, такъ и западные арабы приписывали числовымъ знакамъ индусское происхожденіе. „Губаръ" значитъ имѣющій отношеніе къ пыли или песку, что напоминаетъ намъ о браминскомъ обычаѣ считать съ помощью дощечекъ, посыпанныхъ пылью или пескомъ.

4. Не менѣе поразительнымъ былъ тотъ фактъ, что оба ряда арабскихъ цифръ были похожи гораздо болѣе на apices Боэтія, чѣмъ на современныя цифры Деванагари. Въ особенности знаки Губаръ поразительно походили на Боэтіевы апексы. Но что такое апексы? Боэтій, римскій писатель, жившій въ шестомъ вѣкѣ, написалъ геометрію, гдѣ онъ говоритъ объ абакѣ или счетной доскѣ, *которую онъ приписываетъ пиѳагорейцамъ*. Вмѣсто того, чтобы, слѣдуя древнему обычаю, пользоваться камешками при счетѣ на абакѣ, Боэтій употреблялъ апексы, вѣроятно имѣвшіе форму маленькихъ конусовъ. Каждый изъ нихъ носилъ на себѣ начертанія одной изъ девяти цифръ, которыя и носятъ теперь названіе „apices". Эти цифры встрѣчаются снова въ текстѣ Боэтіева сочиненія [1]). *Боэтій не даетъ символа для выраженія нуля.*

Слѣдуетъ ли удивляться тому, что, стараясь согласить эти повидимому несообразные факты, ученые долго не сходились въ объясненіяхъ странныхъ превращеній числовыхъ знаковъ и того пути, которому эти знаки слѣдовали въ своихъ переселеніяхъ изъ одной страны въ другую?

Объясненіе, наиболѣе благопріятно принятое всѣми учеными, принадлежитъ Вёпкэ (Woepcke) [2]):

1. Индусы пользовались девятью цифрами безъ нуля еще во второмъ вѣкѣ по Р. Х. Извѣстно, что въ это время Индія поддерживала оживленныя торговыя сношенія съ Римомъ черезъ Александрію. При этомъ происходилъ обмѣнъ идей наравнѣ съ обмѣномъ товаровъ. Индусамъ мелькнулъ

[1]) См. соч. *Боэтія* въ изданіи *Фридлейна,* Leipzig, 1867, p. 397.

[1]) См. *Journal Asiatique.* 1-ое полуг., 1863, pp. 69—79 и 514—529. См. также *Cantor,* Vol. I, p. 669.

Санскритскія буквы II вѣка по Р. Х.		ट	३	☽	⊔	⊍	ᛦ	Ҟ	ड	⽄
Apices Боэтія и среднихъ вѣковъ.	I	ꞇ	Ꙁ	ꝑꝛ	ꟼ	Ⴚ	Λ	8	9	ⓐ
Числовые знаки Губаръ западныхъ арабовъ.	I	ꞇ	ꜱ	ꝯ	ς	ʃ	ɔ	ǝ	ꝛ	o
Числовые знаки восточныхъ арабовъ.	I	ϸ	ꟿ	ɓ, ꞔ	o, β	ч	V	Λ	9	•
Числовые знаки Максима Плануда.	I	ϸ	ꟿ	ℨ	ω	ч	v	Λ	9	o
Числовые знаки Деванагари.	ι	२	३	8	ч	६	6	ꞇ	९	o
Изъ сочиненія *Mirrour of the World*, напечатаннаго Какстономъ въ 1480 г.	1	2	3	4	ʃ	6	Λ	8	9	O
Изъ Бамбергской ариѳметики Вагнера (?), 1483.	I	z	3,3	ꝸ, 4	ς, 5	6	Λ, 7	8	9	O
Изъ *De Arte Supputandi* Тонсталля, 1522.	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO

Первыя шесть строкъ этой таблицы списаны съ таблицы, приложенной къ 1 тому исторіи *Кантора*. Числовые знаки Бамбергской Ариѳметики заимствованы изъ сочиненія: *Friedrich Unger,* Die Methodik der Praktischen Arithmetik in Historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, Leipzig, 1888, p. 39. (Мы будемъ цитировать это сочиненіе, какъ *Unger*). Двойныя формы 3, 4, 5, 7 перемѣшаны въ Бамбергской Ариѳметикѣ. Числовые знаки Какстона взяты изъ соч. *W. W. R. Ball,* History of Mathematics, 1893, p. 190. Числовыми знаками Тонсталля мы обязаны добротѣ д-ра Р. Гарнетта, изъ Британскаго музея, который списалъ ихъ для насъ съ оригинала.

свѣтъ греческой мысли, а Александрійцы усвоили философскія и научныя идеи Востока.

2. Девять числовыхъ знаковъ, безъ нуля, проникли такимъ образомъ въ Александрію, гдѣ они могли обратить на себя вниманіе нео-пиѳагорейцевъ. Изъ Александріи попали они въ Римъ, а оттуда въ Испанію и западную часть Африки. Геометрія Боэтія (если только не разсматривать то ея мѣсто, которое относится къ апексамъ, какъ вставку, сдѣланную черезъ пять или шесть вѣковъ послѣ Боэтія) доказываетъ присутствіе цифръ въ Римѣ въ пятомъ столѣтіи. Слѣдуетъ однако замѣтить, что Вёпкэ не привелъ убѣдительныхъ доказательствъ того, что цифры эти были извѣстны въ Александріи во второмъ или третьемъ вѣкѣ.

3. Между вторымъ и восьмымъ столѣтіями начертанія девяти принятыхъ въ Индіи знаковъ претерпѣли измѣненія. Выдающійся арабскій писатель, *Альбируни* (ум. въ 1038 г.), который провелъ много лѣтъ въ Индіи, замѣчаетъ, что индійскіе числовые знаки имѣютъ различный видъ въ различныхъ мѣстностяхъ Индіи и что, когда (въ восьмомъ столѣтіи) индусская система обозначенія перешла къ арабамъ, они выбрали изъ различныхъ видовъ цифръ наиболѣе подходящіе. Но прежде чѣмъ восточные арабы получили такимъ образомъ индійскую систему обозначенія, индусы усовершенствовали ее введеніемъ нуля и приложеніемъ принципа положенія.

4. Замѣтивъ большую пользу этого Колумбова яйца, нуля, удивительнаго символа, произведшаго переворотъ въ системѣ письменной нумераціи, западные арабы заимствовали его у восточныхъ, но сохранили старыя формы девяти цифръ, которыя уже раньше пришли къ нимъ изъ Рима. Причинами этого могли служить, съ одной стороны, отвращеніе къ ненужнымъ новшествамъ, съ другой, быть можетъ, желаніе пойти наперекоръ тому, что принято было ихъ политическими врагами, арабами Востока.

5. Западные арабы сохранили воспоминаніе объ индусскомъ происхожденіи старыхъ формъ и называли ихъ „Губаръ" или „песочными" знаками.

6. Послѣ восьмого столѣтія начертаніе числовыхъ зна-

ковъ въ Индіи подверглось дальнѣйшимъ измѣненіямъ и приняло формы, значительно отличающіяся отъ прежнихъ, а именно формы современныхъ цифръ Деванагари.

Въ спорѣ о происхожденіи и распространеніи нашихъ числовыхъ знаковъ приняли участіе многіе умы. Разыскивая матеріалы для рѣшенія этого вопроса, ученые должны были близко разсмотрѣть условія умственной, коммерческой и политической жизни у индусовъ, александрійскихъ грековъ, римлянъ и въ особенности у восточныхъ и западныхъ арабовъ. Это прекрасный примѣръ того, какъ вопросы, относящіеся къ исторіи математики, могутъ дать сильное побужденіе къ изученію исторіи цивилизаціи и съ своей стороны бросить новый свѣтъ на эту исторію [1]).

Исторія искусства счисленія заставитъ преподавателя математики обратить особое вниманіе на нѣкоторыя педагогическія правила. Мы видѣли, какъ повсюду былъ распространенъ обычай считать по пальцамъ. Вмѣсто пальцевъ часто выбирали группы другихъ предметовъ „подобно тому, какъ жители острововъ Тихаго Океана ведутъ счетъ на кокосовыхъ черешкахъ, откладывая маленькій черешокъ, каждый разъ какъ они доходятъ до 10, и большой — когда доходятъ до 100, или какъ Африканскіе негры считаютъ на камешкахъ и орѣхахъ, и каждый разъ, какъ доходятъ до 5, складываютъ ихъ отдѣльно въ маленькую кучку“ [2]). Отвлеченное понятіе о числѣ достигается здѣсь черезъ посредство *конкретныхъ* предметовъ. Къ такимъ математическимъ истинамъ, какъ то, что $2+1=3$, приводитъ *опытъ въ обращеніи съ осязаемыми вещами.* Какъ мы впослѣдствіи увидимъ, счетъ группами предметовъ въ раннія времена привелъ къ изобрѣтенію счетной доски, которая и до сихъ поръ является цѣннымъ приборомъ при наглядномъ обученіи счету. Нужно поэтому позаботиться, чтобы первоначальныя ариѳметическія знанія ребенка возникли изъ опыта въ обращеніи съ различными группами предметовъ; никогда не слѣдуетъ учить ребенка считать, уда-

---

[1]) *Günther,* цит. соч., p. 13.

[2]) *Tylor,* цит. соч., Vol. I p. 270.

ляя его отъ игрушекъ и другихъ предметовъ, къ обращенію съ которыми онъ привыкъ, и заставляя его, такъ сказать, съ закрытыми глазами учить наизусть отвлеченныя формулы $1+1=2$, $2+1=3$ и т. д. Ходъ развитія искусства счета въ первобытныя времена подчеркиваетъ значеніе нагляднаго способа обученія.

Ариѳметика и Алгебра.

ЕГИПЕТЪ.

Самое древнее изъ извѣстныхъ въ наше время математическихъ руководствъ—это папирусъ, хранящійся въ коллекціи Ринда въ Британскомъ музеѣ. Этотъ интересный іератическій документъ, описанный Бёрчемъ въ 1868 г. и переведенный Эйзенлоромъ [1]) въ 1877 г., былъ написанъ египтяниномъ, по имени Ахмесъ, въ царствованіе фараона Ра-а-усъ, между 1700 и 2000 г. до Р. Х. Сочиненіе это озаглавлено такъ: „Наставленіе къ пріобрѣтенію знанія всѣхъ тайныхъ вещей". Авторъ его увѣряетъ, что оно основано на болѣе древнихъ документахъ, написанныхъ во времена царя [Ра-ен-м]атъ. Если только спеціалисты не ошибаются, полагая, что имя, которое нельзя разобрать на папирусѣ, есть имя царя Ра-ен-матъ [т. е. Аменемхатъ III], то отсюда слѣдуетъ, что оригиналъ сочиненія на много столѣтій древнѣе копіи, сдѣланной съ него Ахмесомъ.

Папирусъ Ахмеса даетъ намъ поэтому понятіе о состояніи египетской геометріи, ариѳметики и алгебры, относящееся къ періоду времени не позже, чѣмъ за 1700 лѣтъ до Р. Х., быть можетъ и къ болѣе раннему періоду времени, около 3000 лѣтъ до начала нашей эры. Математическія знанія, обнаруживаемыя въ этомъ папирусѣ, не такъ

---

[1]) *A. Eisenlohr*. Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), Leipzig, 1877, 2-ое изд. 1891. См. также *Cantor,* I., pp. 21—42 и *James Gow,* A short History of Greek Mathematics, Cambridge, 1884, pp. 16—19. Это сочиненіе мы будемъ цитировать впослѣдствіи, какъ *Gow.*

велики, какъ этого можно было бы ожидать отъ строителей пирамидъ; тѣмъ не менѣе подробное разсмотрѣніе сочиненія показываетъ, что математика достигла уже значительной степени развитія въ то время, когда Авраамъ посѣтилъ Египетъ.

Разсматривая папирусъ Ахмеса, мы видимъ, что египтяне не пришли ни къ какимъ теоретическимъ выводамъ. У нихъ нѣтъ теоремъ, нѣтъ почти никакихъ общихъ правилъ для рѣшенія задачъ. Въ большинствѣ случаевъ авторъ рѣшаетъ послѣдовательно нѣсколько задачъ одного и того же рода. Изъ этихъ рѣшеній легко было бы, посредствомъ наведенія, вывести общія правила, но авторъ этого не дѣлаетъ. Когда мы вспомнимъ, что еще сто лѣтъ тому назадъ у многихъ авторовъ англійскихъ учебниковъ ариѳметики былъ обычай излагать статью о дробяхъ лишь въ концѣ книги, намъ покажется удивительнымъ, что разсматриваемое нами руководство, написанное 4000 лѣтъ тому назадъ, *начинается* съ упражненій въ дѣйствіяхъ надъ дробями и обращаетъ мало вниманія на цѣлыя числа. Гоу вѣроятно правъ, предполагая, что Ахмесъ написалъ свою книгу для избранныхъ математиковъ своего времени.

Хотя дроби и встрѣчаются въ древнѣйшихъ математическихъ памятникахъ, найденныхъ до сихъ поръ, древніе не достигли однако большого искусства въ пользованіи дробями. Повидимому, предметъ этотъ представлялъ для нихъ большія трудности. Они избѣгали обыкновенно производить измѣненія одновременно и въ числителѣ и въ знаменателѣ. Дроби находимъ мы и у вавилонянъ. У нихъ были не только *шестидесятичныя* дѣленія мѣръ и вѣсовъ, но и *шестидесятичныя дроби* [1]). У этихъ дробей былъ *постоянный* знаменатель (60), и обозначали ихъ, записывая числителя немного правѣе того обыкновеннаго положенія, какое занимали слова и числа, знаменателя же подразумѣвали. Мы увидимъ впослѣдствіи, что римляне также обыкновенно пользовались дробями съ постояннымъ знаменателемъ, но полагали его равнымъ 12. Египтяне и греки, наоборотъ,

---

[1]) *Cantor,* Vol. I, pp. 79, 85.

сохраняли значенiе числителя постояннымъ и пользовались дробями съ различными знаменателями. Ахмесъ ограничивается разсмотрѣнiемъ особаго класса дробей, а именно *долей единицы,* т. е. дробей, числители которыхъ равны единицѣ. Дроби обозначали, записывая числителя, надъ которымъ ставили точку или особый символъ, называемый *ро*. Дроби, которыя не составляютъ одной доли единицы, представлялись въ видѣ суммъ такихъ долей. Такъ, Ахмесъ писалъ $\frac{1}{6}\ \frac{1}{18}$ вмѣсто $\frac{2}{9}$. Любопытно замѣтить, что, хотя онъ и знаетъ о томъ, что дробь $\frac{2}{3}$ равна $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$, онъ дѣлаетъ въ этомъ случаѣ исключенiе и употребляетъ особый символъ для обозначенiя $\frac{2}{3}$, пользуясь этой дробью на ряду съ долями единицы [1]). Основная задача въ Ахмесовой ариѳметикѣ дробей — найти доли единицы, сумма которыхъ равна данной дроби. Задача эта рѣшалась съ помощью данной въ папирусѣ таблицы, въ которой всѣ дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ (гдѣ n обозначаетъ послѣдовательныя цѣлыя числа, не превышающiя 49) приводятся къ суммѣ долей единицы. Такъ, $\frac{2}{35}=\frac{1}{30}\ \frac{1}{42}$, $\frac{2}{43}=\frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}$. Съ помощью этой таблицы Ахмесъ могъ рѣшать задачи о дѣленiи 2 на 3, 2 на 17 и т. д. Ахмесъ нигдѣ не говоритъ, почему онъ ограничивается разсмотрѣнiемъ дробей съ числителемъ 2; равнымъ образомъ и не упоминаетъ о томъ, какъ, когда и кѣмъ была построена приводимая имъ таблица. Ясно однако, что, пользуясь этой таблицей, можно разложить на доли единицы всякую дробь, знаменатель которой есть нечетное число, меньшее, чѣмъ 100. Дѣленiе 5 на 21 можно было бы выполнить слѣдующимъ образомъ: 5=1+2+2. Изъ таблицы мы получаемъ $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$. Такимъ образомъ $\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+(\frac{1}{14}\ \frac{1}{42})+(\frac{1}{14}\ \frac{1}{42})=\frac{1}{21}+(\frac{2}{14}\ \frac{2}{42})=\frac{1}{21}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}=\frac{1}{7}\ \frac{2}{21}=\frac{1}{7}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$. Можно замѣтить, что существуетъ много способовъ разложенiя какой-нибудь дроби на доли единицы, но Ахмесъ всегда даетъ только одинъ изъ нихъ. Противъ своего обыкновенiя онъ даетъ общее правило умноженiя дроби на $\frac{2}{3}$. Онъ говоритъ: „если тебя спросятъ, какъ велики $\frac{2}{3}$ отъ $\frac{1}{5}$, возьми вдвойнѣ и шесть разъ; это и будетъ $\frac{2}{3}$ его. Такъ же нужно поступать и со всякой другой дробью“.

[1]) *Cantor,* Vol. I, p. 24.

Такъ какъ египтяне писали только знаменателя дроби, то „взять вдвойнѣ и шесть разъ“ означаетъ у Ахмеса удвоить и ушестерить знаменателя. Вслѣдствіе того, что $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}$, правило Ахмеса замѣняетъ такую формулу:

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{6\times5}.$$

Утвержденіе его, что „такъ же нужно поступать и со всякой другой дробью“, означаетъ, повидимому, [1]) что

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a}.$$

Папирусъ содержитъ 17 примѣровъ, показывающихъ, на что нужно множить дробь или смѣшанное число или что нужно къ нимъ придать, чтобы получить данный результатъ. Методъ рѣшенія такихъ задачъ состоитъ въ приведеніи данныхъ дробей къ общему знаменателю. Странно сказать, этотъ общій знаменатель не всегда выбирается такъ, чтобы онъ былъ кратнымъ всѣхъ данныхъ знаменателей. Ахмесъ даетъ примѣръ: увеличить $\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{45}$ до 1. За общаго знаменателя принимается повидимому 45, такъ какъ Ахмесъ приводитъ рѣшеніе задачи къ сложенію чиселъ $11\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1. Сумма ихъ $23\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ сорокъ пятыхъ долей единицы. Прибавивъ къ этому $\frac{1}{9}\ \frac{1}{40}$ получимъ $\frac{2}{3}$. Прибавивъ $\frac{1}{3}$ получимъ 1. Такимъ образомъ, для полученія единицы нужно прибавить къ данной дроби $\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{40}$.

На что нужно умножить $\frac{1}{16}\ \frac{1}{112}$, чтобы получить $\frac{1}{8}$? Принявъ за общаго знаменателя 28, Ахмесъ получаетъ $\frac{1}{16}=\frac{1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}{28}$, $\frac{1}{112}=\frac{\frac{1}{4}}{28}$; сумма этихъ дробей равна $\frac{2}{28}$. Далѣе, $\frac{1}{8}=\frac{3\frac{1}{2}}{28}$. Такъ какъ $2+1+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$, то, взявъ сначала $\frac{2}{28}$, затѣмъ половину этой дроби $\frac{1}{28}$, затѣмъ половину $\frac{1}{28}$ т. е. $\frac{\frac{1}{2}}{28}$, мы получимъ $\frac{3\frac{1}{2}}{28}$. Отсюда слѣдуетъ что $\frac{1}{16}\ \frac{1}{112}$ превращается въ $\frac{1}{8}$ по умноженіи на $1\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$.

Эти примѣры открываютъ намъ методы, совершенно чуждые современнымъ математикамъ [2]). Одинъ методъ на-

---

[1]) *Cantor*, Vol. I, p. 29.

[2]) Канторово описаніе дѣйствій надъ дробями, встрѣчающимися въ папирусѣ Ахмеса, доставило знаменитому англійскому математику

шелъ однако обширное примѣненіе въ ариѳметикѣ пятнадцатаго вѣка и въ болѣе позднія времена, а именно, методъ сложенія кратныхъ частей, которымъ широко пользуются въ практической ариѳметикѣ. Во второмъ изъ приведенныхъ примѣровъ берутся кратныя части $\frac{2}{28}$. Примѣненіе того же процесса видно еще въ тѣхъ вычисленіяхъ, которыя служатъ Ахмесу для повѣрки тожествъ, записанныхъ въ таблицы долей единицы.

Ахмесъ переходитъ затѣмъ къ рѣшенію одиннадцати задачъ, приводящихъ къ простымъ уравненіямъ съ одной неизвѣстной. Неизвѣстная называется *хау* или „куча"; встрѣчаются и символы, служащіе для обозначенія сложенія, вычитанія и равенства. Мы приведемъ слѣдующій образецъ уравненія, встрѣчающійся у Ахмеса [1]:

Hā'	neb-f	ma-f	ro sefeχ-f	hi-f	χeper-f em sa sefeχ	
Куча	$\frac{2}{3}$ ея	$\frac{1}{2}$ ея	$\frac{1}{7}$ ея	цѣлая	составляютъ	37
т. е.	$x(\frac{2}{3}$ +	$\frac{1}{2}$ +	$\frac{1}{7}$ +	1)	=	37

Здѣсь означаетъ $\frac{2}{3}$, — половину. Другія доли единицы Ахмесъ обозначаетъ, записывая число и располагая надъ нимъ знакъ ⬭, *ро*. Задача, сходная съ только что приведенной, предложена въ такой формѣ: „Куча, $\frac{2}{3}$ ея, $\frac{1}{2}$ ея, $\frac{1}{7}$ ея, цѣлая составляютъ 33;" т. е. $\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 33$. Задача рѣшается такъ: $1\;\frac{2}{3}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{7}\;x = 33$, затѣмъ $1\;\frac{2}{3}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{7}$ умножается, по описанному выше способу, на такое число, которое даетъ въ результатѣ умноженія 33; получается *куча*, равная $14\;\frac{1}{4}\;\frac{1}{97}\;\frac{1}{56}\;\frac{1}{679}\;\frac{1}{776}\;\frac{1}{194}\;\frac{1}{388}$. Такимъ образомъ мы встрѣчаемся здѣсь съ примѣромъ рѣшенія алгебраическаго уравненія!

Сильвестеру (бывшему тогда въ Бальтиморѣ) матеріалъ для его мемуара: „On a Point in the Theory of Vulgar Fractions", напечатаннаго въ *Am. Journal of Mathematics*, III, 1880, pp. 32 и 388.

[1]) *Ludwig Matthiessen.* Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, 1878, p. 269. Мы будемъ впослѣдствіи цитировать это сочиненіе, какъ *Matthiessen.*

Какъ въ египетскомъ папирусѣ, такъ и въ раннихъ вавилонскихъ памятникахъ мы находимъ примѣры ариѳметическихъ и геометрическихъ прогрессій. Ахмесъ даетъ такой примѣръ: „раздѣлить 100 хлѣбовъ между 5 лицами; $\frac{1}{7}$ того, что получатъ первые три, должна составлять то, что получатъ послѣдніе два. Какъ велика разность?“ [1]) Ахмесъ даетъ слѣдующее рѣшеніе: „примемъ за разность $5^1/_2$; 23, $17^1/_2$, 12, $6^1/_2$, 1. Умножимъ на $1\frac{2}{3}$, $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$, $1\frac{2}{3}$.“ Какъ пришелъ Ахмесъ къ числу $5^1/_2$? Быть можетъ слѣдующимъ путемъ [2]): пусть a и $-d$ первый членъ и разность той ариѳметической прогрессіи, которую нужно составить, тогда $\frac{1}{7}$ $[a+(a-d)+(a-2d)]=(a-3d)+(a-4d)$, откуда $d=5^1/_2$ $(a-4d)$, т. е. величина d въ $5^1/_2$ разъ больше послѣдняго числа. *Полагая* послѣдній членъ равнымъ единицѣ, онъ получаетъ первую прогрессію. Сумма ея равна 60; сумма искомой должна быть равна 100, поэтому члены найденной прогрессіи и надо умножить на $1\frac{2}{3}$, такъ какъ $60\times1\frac{2}{3}=100$. Мы встрѣчаемся такимъ образомъ съ методомъ рѣшенія задачъ, который въ болѣе позднія времена появляется снова у индусовъ, арабовъ и у современныхъ европейцевъ—методомъ *ложнаго положенія*. Въ другомъ мѣстѣ мы объяснимъ подробнѣе, въ чемъ состоитъ этотъ методъ.

Еще болѣе любопытнымъ является слѣдующее мѣсто въ папирусѣ Ахмеса. Онъ говоритъ *о лѣстницѣ,* состоящей изъ чиселъ 7, 49, 343, 2401, 16807. Рядомъ съ этими степенями числа 7 стоятъ слова *картина, кошка, мышь, ячмень, мѣра*. Папирусъ не даетъ ключа къ раскрытію смысла этой задачи, но, какъ полагаетъ Канторъ, ключъ этотъ можно найти въ слѣдующей задачѣ, встрѣчающейся на 3000 лѣтъ позднѣе въ *liber abaci* (1202 по Р. Х.) Леонарда Пизанскаго: 7 старухъ идутъ въ Римъ; у каждой старухи есть по 7 муловъ, каждый мулъ везетъ по 7 мѣшковъ, въ каждомъ мѣшкѣ по 7 хлѣбовъ, въ каждомъ хлѣбѣ по 7 ножей, каждый ножъ въ 7 ножнахъ. Какъ велико число всѣхъ этихъ предметовъ. Это заставляетъ полагать что содержаніе задачи Ахмеса было слѣдующее: у 7 лицъ есть по 7 кошекъ;

[1]) *Cantor,* Vol. I. p. 40.
[2]) *Cantor,* Vol. I, p. 40.

каждая кошка съѣдаетъ по 7 мышей, каждая мышь съѣдаетъ по 7 колосьевъ ячменя, изъ каждаго колоса можетъ вырости по 7 мѣръ зерна. Каковъ рядъ чиселъ возникающій изъ данныхъ этой задачи, какъ велика сумма его членовъ? Ахмесъ даетъ эти числа, а также и сумму ихъ, 19607. Задачи такого рода могли предлагаться для забавы. Если приведенное выше толкованіе вѣрно, то, какъ кажется, еще сорокъ вѣковъ тому назадъ ученые позволяли себѣ заниматься математическими развлеченіями.

Въ задачахъ *хау,* одинъ примѣръ которыхъ мы привели, и въ ихъ рѣшеніяхъ можно видѣть зачатки алгебры. Насколько свидѣтельствуютъ объ этомъ документы, ариѳметика и алгебра развивались одновременно. Не можетъ быть никакого сомнѣнія въ томъ, что ариѳметика древнѣе алгебры; слѣдуетъ однако обратить вниманіе на тѣсное родство между ними, обнаруживающееся въ самомъ началѣ достовѣрной ихъ исторіи. Поэтому и при обученіи математикѣ должна быть сохранена тѣсная связь между обѣими науками. Въ Соединенныхъ Штатахъ алгебра долгое время оставалась въ сторонѣ, между тѣмъ какъ особое вниманіе обращали на ариѳметику. Но это время прошло, и алгебра возстановлена въ своихъ правахъ. „Математическая Конференція Десяти“ въ 1892 году, слѣдуя мнѣнію лучшихъ педагоговъ, рекомендовала болѣе раннее изученіе нѣкоторыхъ отдѣловъ элементарной алгебры.

Изъ всѣхъ частей Ахмесова папируса, таблица долей единицы наиболѣе заинтересовала спеціалистовъ и потребовала отъ нихъ больше всего остроумія и догадливости. Какъ была построена эта таблица? Нѣкоторые ученые думаютъ, что она была вычислена не однимъ лицомъ, и даже не въ одну и ту же эпоху, и что для разныхъ дробей служили разные методы вычисленія. Съ другой стороны, Лоріа полагаетъ, что онъ открылъ общій способъ, съ помощью котораго могла бы быть вычислена, какъ эта таблица, такъ и другія существующія таблицы, подобныя ей [1]).

---

[1]) См. слѣдующія статьи *Gino Loria:* „Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani“ въ *Bibliotheca Mathematica,* 1892, pp. 97—109; „Un nuovo documento relativo alla logistica greco-egiziana“,

Что эпоха Ахмеса была временемъ процвѣтанія египетской математики, показываетъ то обстоятельство, что существуютъ еще два другихъ папируса (открытыхъ въ 1889 и 1890 гг.), принадлежащихъ къ тому же періоду времени (?). Они были найдены въ Кахунѣ, къ югу отъ пирамиды Иллахунъ. Эти документы имѣютъ большое сходство съ книгой Ахмеса, какъ и папирусъ, открытый недавно [1]) въ Ахмимѣ, городѣ расположенномъ на берегу Нила въ Верхнемъ Египтѣ. Папирусъ этотъ написанъ по гречески, какъ предполагаютъ, между 500 и 800 гг. по Р. Х. Какъ и его древній предшественникъ Ахмесъ, авторъ даетъ таблицу долей единицы. По сравненію съ ариѳметикой Ахмеса онъ не обнаруживаетъ никакого прогресса. Впродолженіе болѣе тысячи лѣтъ египетская математика находилась въ состояніи полнаго *застоя!*

ГРЕЦІЯ.

Переходя къ исторіи ариѳметики и алгебры въ Греціи, мы замѣтимъ прежде всего, что древніе греки не были самоучками; они признавали, что учителями ихъ были египетскіе жрецы. Греки очень мало создали въ искусствѣ вычисленія, между тѣмъ какъ въ геометріи они скоро достигли такой высоты, о которой египтяне не могли и мечтать. Только по прошествіи золотаго вѣка геометрическихъ открытій находимъ мы въ лицѣ Никомаха и Діофанта ученыхъ, которые въ сколько-нибудь замѣтной мѣрѣ способствовали развитію алгебры.

Греческіе математики имѣли обыкновеніе устанавливать различіе между наукой о числахъ и искусствомъ вы-

---

тамъ же, 1893, pp. 79 — 89; „Studi intorno alla logistica greco-egiziana", Estratto dal Volume XXXII (1-o della 2-a serie) del *Giornale di Matem. di Battaglini*, pp. 7 - 35.

[1]) *J. Baillet.* „Le papyrus mathématique d'Akhmim". *Mémoires publiés par les membres de la mission archéologique française au Caire,* T. IX, 1-r fascicule, Paris, 1892, pp. 1 — 88. См. также мемуары Лоріа, упомянутые въ предыдущемъ примѣчаніи и *Cantor,* Vol. I, pp. 23 и 470.

численія. Первую называли они *ариѳметикой*, второе — *логистикой*.

Греческіе писатели рѣдко говорятъ о вычисленіяхъ, выполненныхъ съ помощью алфавитныхъ числовыхъ знаковъ. Сложеніе, вычитаніе и даже умноженіе вѣроятно производились на счетной доскѣ. Евтокій, коментаторъ, жившій въ шестомъ вѣкѣ по Р. Х., приводитъ много примѣровъ умноженій, которыя могли быть выполнены опытными греческими математиками классическаго періода [1]). У софистовъ искусство вычисленія пользовалось нѣкоторымъ вниманіемъ, Платонъ же провозгласилъ его неблагороднымъ и дѣтскимъ искусствомъ: онъ цѣнилъ только философію ариѳметики.

Въ отличіе отъ египтянъ, греческіе писатели не пользовались исключительно только долями единицы. Дроби съ числителемъ единица они обозначали, записывая знаменателя и снабжая его обозначеніе двойнымъ удареніемъ. Такъ, $\varrho\iota\beta'' = \frac{1}{112}$. Другія дроби обозначали они обыкновенно, записывая числителя одинъ разъ съ однимъ удареніемъ, а затѣмъ знаменателя дважды, каждый разъ съ двумя удареніями. Такъ, $\iota\zeta'$ $\varkappa\alpha''$ $\varkappa\alpha'' = \frac{17}{21}$. Какъ и у египтянъ, доли единицы, обозначенія которыхъ написаны рядомъ, должны быть сложены.

Подобно всѣмъ восточнымъ народамъ, египтяне и греки пользовались двумя пособіями при вычисленіи, абакомъ или счетной доской и символикой пальцевъ руки. Неизвѣстно, какіе знаки употреблялись при счетѣ на пальцахъ; быть можетъ изученіе древнихъ статуй, барельефовъ и картинъ еще откроетъ намъ тайну этого счета. Абакъ существовалъ въ разныхъ формахъ въ разныя времена и у различныхъ народовъ. Во всѣхъ случаяхъ плоская поверхность подраздѣлялась на различныя области и въ каждой изъ этихъ областей камешекъ или другой предметъ считался имѣющимъ особое числовое значеніе. У насъ нѣтъ подробныхъ указаній относительно устройства египетскаго или

---

[1]) Образцы такихъ умноженій см. у *Кантора*, Beiträge z. Kulturl. d. Völker, p. 393; *Hankel*, p. 56; *Gow*, p. 50; *Friedlein*, p. 76; также въ моей книгѣ *History of Mathematics*, 1895, p. 65; книгу эту мы будемъ цитировать впослѣдствіи подъ литерами С. Н. М.

греческаго абака. Геродотъ (II, 36) говоритъ, что египтяне *„считаютъ съ помощью камешковъ,* передвигая руку справа налѣво, между тѣмъ какъ эллины передвигаютъ ее слѣва направо“. Эти слова указываютъ на первобытный двигательный счетъ съ помощью камешковъ, бывшій въ употребленіи у обоихъ народовъ. Тотъ фактъ, что руку передвигали при этомъ направо или налѣво, указываетъ на то, что счетная площадка или доска раздѣлена была *вертикальными* линіями, которыя шли сверху внизъ, по отношенію къ вычислителю. Ямвлихъ сообщаетъ намъ, что абакъ пиѳагорейцевъ состоялъ изъ доски, посыпанной пылью или пескомъ. Въ такомъ случаѣ всякую запись можно было легко уничтожить, снова посыпавъ доску пескомъ или пылью. Камешекъ, расположенный въ полосѣ или колоннѣ, находившейся съ правой руки, означалъ 1, во второй колоннѣ справа 10, въ третьей колоннѣ 100 и т. д. Вѣроятно въ одной и той же колоннѣ никогда не клали больше девяти камешковъ, такъ какъ десять такихъ камешковъ были бы равны по своему значенію одной единицѣ слѣдующаго высшаго разряда. Египтяне, съ другой стороны, выбрали крайнюю лѣвую колонну какъ мѣсто единицъ, причемъ вторая колонна слѣва означала десятки, третья сотни и т. д. Это описаніе счетной доски встрѣчаетъ дальнѣйшее подтвержденіе въ интересномъ сравненіи, которое Діогенъ Лаертійскій (I, 59) приписываетъ Солону [1]: „человѣкъ, который дружитъ съ тиранами, подобенъ камешку въ вычисленіи, значеніе котораго бываетъ иногда большое, а иногда малое“.

Счетной доской пользовались, повидимому, въ Египтѣ и въ Греціи для выполненія простѣйшихъ вычисленій съ цѣлыми числами. Руководство Ахмеса съ его ученіемъ о дробяхъ было вѣроятно написано для тѣхъ, которые уже освоились со счетомъ на абакѣ или на пальцахъ. Въ греческихъ математическихъ сочиненіяхъ даются обыкновенно числовые результаты, самыя же вычисленія не приводятся. Такъ, выдающимся математикамъ часто приходилось извлекать квадратные корни. Въ своемъ *Измѣреніи круга* Архи-

---

[1]) *Cantor,* Vol. I, p. 122.

медъ утверждаетъ, напримѣръ, что $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ и $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, но не дѣлаетъ никакихъ указаній на тотъ методъ, съ помощью котораго онъ нашелъ эти приближенія [1]).

Въ тѣ времена, когда употреблялись шестидесятичныя числа (привезенныя изъ Вавилоніи въ Грецію около того времени, когда жилъ греческій геометръ Гипсиклъ и александрійскій астрономъ Птолемей), способъ извлеченія квадратныхъ корней походилъ на тотъ, которымъ пользуются въ настоящее время. Сохранился образчикъ примѣненія этого метода, данный Θеономъ, отцомъ Гипатіи. Онъ нашелъ, что $\sqrt{4500^0} = 67^0\ 4'\ 55''$.

Архимедъ показалъ, какъ расширить греческую систему нумераціи, распространивъ ее на сколь угодно большія числа. Съ помощью обыкновенной номенклатуры, принятой въ его дни, можно было выражать числа, не превышающія 10^8. Принявъ это число за единицу втораго разряда, 10^{16}—за единицу третьяго разряда и т. д., можно построить систему, обнимающую столь большія числа, что съ помощью ихъ можно считать и самый песокъ. Полагая, что въ пространствѣ, занимаемомъ маковымъ зерномъ, помѣщается 10 000 песчинокъ, Архимедъ находитъ число, превосходящее число песчинокъ, какое можно было бы помѣстить внутри шара, радіусъ котораго простирается отъ земли до неподвижныхъ звѣздъ. Эти интересныя разсужденія Архимеда находятся въ его сочиненіи, называемомъ „счетчикомъ песка“ (arenarius); исчисленіе песчинокъ очень напоминаетъ приписываемое Буддѣ, индійскому реформатору, вычисленіе, въ которомъ опредѣляется число первичныхъ атомовъ въ линіи, имѣющей въ длину одну милю, причемъ предполагается, что атомы эти плотно соприкасаются другъ съ другомъ.

---

[1]) Вопросъ о томъ, въ чемъ состоялъ методъ Архимеда и вообще греческій методъ извлеченія квадратныхъ корней, былъ въ свое время любимой темой для разныхъ догадокъ и предположеній со стороны ученыхъ. См. напримѣръ, *H. Weissenborn.* Berechnung des Kreisumfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano, Berlin 1894. Библіографію этого предмета см. у *С. Гюнтера.* Geschichte d. antiken Naturwissenschaft u. Philosophie, p. 16.

Наука о числахъ, какъ отдѣльное ученіе, отличное отъ искусства вычисленія, пользовалась особымъ вниманіемъ пиѳагорейцевъ. Самъ Пиѳагоръ впиталъ въ себя египетскую математику и египетскій мистицизмъ. Кромѣ великаго открытія — ирраціональныхъ количествъ (о которыхъ мы будемъ говорить впослѣдствіи)—пиѳагорейцы не сдѣлали значительныхъ вкладовъ въ науку о числахъ. Мы должны прибавить къ этому, что у грековъ ирраціональныя количества не принадлежали къ классу чиселъ. Пиѳагорейцы искали начала всѣхъ вещей въ числахъ; гармонія зависитъ отъ музыкальной пропорціи, порядокъ и красота вселенной основаны на числахъ; въ планетныхъ движеніяхъ различали они удивительную „гармонію сферъ". Кромѣ того нѣкоторыя числа обладали необыкновенными свойствами. Такъ, *единица* есть сущность вещей; *четыре*— наиболѣе совершенное число, находящееся въ соотвѣтствіи съ человѣческой душой. По Филолаю, 5 есть причина цвѣта, 6—холода, 7—разума, здоровья и свѣта, 8—любви и дружбы [1]). Даже Платонъ и Аристотель приписываютъ числамъ добрыя качества. Хотя всѣ такія разсужденія были сами по себѣ фантастическими и безплодными, они заставляли прибѣгать къ математическимъ изысканіямъ, иногда очень плодотворнымъ.

Пиѳагорейцы раздѣляли числа на нечетныя и четныя; они замѣтили что сумма нечетныхъ чиселъ отъ 1 до $2n+1$ есть всегда полный квадратъ. Раздѣленіе чиселъ на неравнобочныя, треугольныя, совершенныя, избыточныя, недостаточныя, дружныя, къ которому прибѣгали пиѳагорейцы [2]), не имѣетъ особаго значенія. Пиѳагорейцы обращали большое вниманіе на пропорціи. Они говорили, что количества $a, b, c, d,$ находятся въ *ариѳметической* пропорціи, когда $a-b=c-d$, что они составляютъ *геометрическую* пропорцію, когда $a:b=c:d$; *гармоническую* пропорцію, когда $a-b:b-c=a:c$; *музыкальную* пропорцію, когда $a:\frac{1}{2}(a+b)=2ab/(a+b):b$. Ямвлихъ говоритъ, что эта послѣдняя пропорція была заимствована у вавилонянъ.

---

[1]) *Gow*, p. 69.

[2]) Опредѣленія такихъ чиселъ см. у *Gow*, p. 70, или C.H.M. p. 68.

Седьмая, восьмая и девятая книги Евклидовыхъ *Началъ* имѣютъ своимъ предметомъ науку о числахъ; вторая и десятая, хотя явнымъ образомъ и трактуютъ о геометрическихъ величинахъ, тѣмъ не менѣе приложимы и къ числамъ. Евклидъ былъ настоящимъ геометромъ, проникнутымъ духомъ своей науки, и даже ариѳметическія его книги напоминаютъ о геометріи. Вотъ, напримѣръ, 21-ое опредѣленіе VII книги [1]): „плоскія и тѣлесныя числа подобны, когда стороны ихъ пропорціональны". Евклидъ не обозначаетъ чиселъ принятыми числовыми знаками и не пользуется обозначеніемъ, сколько-нибудь похожимъ на наши современныя алгебрическія обозначенія; онъ представляетъ числа *линіями*. Употребленіе такихъ символовъ не можетъ легко наводить на открытіе новыхъ свойствъ чиселъ. Очень часто тѣ свойства чиселъ, которыя наша система обозначенія дѣлаетъ совершенно ясными, могутъ быть выведены при символизмѣ линій лишь путемъ очень трудныхъ разсужденій [2]).

Въ 7-й книгѣ встрѣчаемъ мы впервые опредѣленіе простыхъ чиселъ. Евклидъ опредѣляетъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ съ помощью процесса, совпадающаго съ нашимъ способомъ дѣленія. Онъ прилагаетъ къ числамъ теорію пропорцій, которая въ 5-ой книгѣ излагается въ общемъ видѣ для величинъ какого-либо рода. Въ 8-ой книгѣ говорится о числахъ, составляющихъ непрерывную пропорцію. Въ 9-ой книгѣ заканчивается изложеніе этого предмета, затѣмъ говорится о простыхъ числахъ; эта книга содержитъ въ себѣ замѣчательную теорему (двадцатую) состоящую въ томъ, что простыхъ чиселъ безконечное множество.

Въ теченіе четырехъ столѣтій послѣ Евклида, геометрія исключительно удерживала вниманіе грековъ, и теорія чи-

---

[1]) Изданіе *Гейберга*, Vol. II., p. 189 *).

*) Въ переводѣ *Петрушевскаго* (Спб. 1835): „Подобными называются тѣ двумѣрныя и тримѣрныя числа, коихъ множители пропорціональны". *Прим. редакт.*

[2]) *G. H. F. Nesselmann*, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842, p. 184. Книга эта цитируется впослѣдствіи какъ *Nesselmann*.

селъ была въ пренебреженіи. Въ этотъ періодъ только два имени достойны упоминанія, *Эратосѳенъ* (приблизительно 275—194 гг. до Р. Х.) и *Гипсиклъ* (между 200 и 100 гг. до Р. Х.). Послѣднему изъ этихъ ученыхъ мы обязаны изысканіями о многоугольныхъ числахъ и ариѳметическихъ прогрессіяхъ. Эратосѳенъ изобрѣлъ знаменитое „рѣшето" для нахожденія простыхъ чиселъ. Напишемъ всѣ послѣдовательныя нечетныя числа отъ 3 до извѣстнаго предѣла. Зачеркивая каждое третье число изъ слѣдующихъ за числомъ 3, мы отсѣемъ всѣ числа, кратныя 3; зачеркивая каждое пятое число послѣ 5, отсѣемъ кратныя 5, и т. д. Всѣ числа, оставшіяся послѣ такого отсѣва, будутъ простыми. Изобрѣтеніе „рѣшета" и не требовало, конечно, большого напряженія ума; замѣчательно однако то, что послѣ Эратосѳена до самаго девятнадцатаго вѣка не было достигнуто никакихъ новыхъ результатовъ, относящихся къ способу отысканія простыхъ чиселъ, заключающихся въ ряду 1, 2, 3, . . . n; въ 19-мъ вѣкѣ предметъ этотъ обогатился новыми, по большей части очень трудными и сложными изслѣдованіями Гаусса, Лежандра, Дирикле, Риманна и Чебышева.

Изученіе ариѳметики возродилось около 100 г. по Р. Х. въ трудахъ пиѳагорейца *Никомаха*[1]) изъ Геразы (вѣроятно, города, находившагося въ Аравіи). Онъ написалъ по гречески сочиненіе, извѣстное подъ заглавіемъ *Introductio Arithmetica*. Историческое значеніе этого труда велико не столько потому, что онъ заключаетъ въ себѣ оригинальныя изслѣдованія, сколько потому, что онъ представляетъ собою самое раннее (изъ извѣстныхъ намъ до сихъ поръ) систематическое руководство по ариѳметикѣ, и потому, что въ теченіе болѣе 1000 лѣтъ онъ служилъ образцомъ для всѣхъ руководствъ подобнаго рода въ Европѣ. Въ небольшой мѣрѣ, Никомахъ сдѣлалъ для ариѳметики то, что Евклидъ сдѣлалъ для геометріи. Его ариѳметика была въ свое время такъ же знаменита, какъ позднѣе, ариѳметика Адама Ризе въ Германіи и Кокера въ Англіи. Желая похвалить одного

[1]) См. *Nesselmann*, pp. 191—216; *Gow*, pp. 88—95; *Cantor*, Vol. I. pp. 400—404.

вычислителя за его искусство, Лукіанъ говоритъ: „Ты считаешь, какъ Никомахъ изъ Геразы“ [1]). Переводы Никомахова сочиненія были сдѣланы Аппулеемъ (этотъ переводъ потерянъ) и Боэтіемъ. Элементарныя части этого сочиненія въ переводѣ Боэтія пользовались большимъ вліяніемъ въ западной Европѣ до проникновенія туда индусской ариѳметики. Послѣ этого, въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій, греческая ариѳметика вела храбрую, но тщетную борьбу за существованіе со своимъ неизмѣримо болѣе сильнымъ индійскимъ соперникомъ.

Стиль Никомаха значительно отличается отъ стиля его предшественниковъ. Способъ изложенія у него не дедуктивный, а индуктивный. Геометрическихъ символовъ нѣтъ; различные классы чиселъ выражены съ помощью настоящихъ числовыхъ знаковъ. Главная задача автора — классификація чиселъ. Находясь подъ вліяніемъ философіи и богословія, онъ иногда употребляетъ большія усилія, чтобы провести раздѣленіе на группы по три. Такъ, *нечетныя* числа бываютъ или „простыми и несоставными“, или „составными“, или, наконецъ, „составными, но простыми относительно другъ друга“. Проистекающая изъ такой классификаціи номенклатура очень тяжеловѣсна. Мы находимъ латинскіе эквиваленты для его греческихъ терминовъ 1500 лѣтъ спустя въ *печатныхъ* руководствахъ по ариѳметикѣ, принадлежащихъ его ученикамъ. Такъ, отношеніе $\frac{m+1}{m}$ называется *superparticularis*, $\frac{m}{m+1}$ *subsuperparticularis*, отношеніе $3\frac{1}{4} = \frac{3\times 4+1}{4}$ носитъ названіе *triplex sesquiquartus* [2]). Никомахъ даетъ таблицу чиселъ, расположенныхъ въ видѣ шахматной доски съ 100 квадратами. Таблица эта могла бы служить таблицей умноженія, но онъ, повидимому, пользовался ею для изученія отношеній [3]). Онъ описываетъ многоугольныя числа, различные роды пропорцій (всего 11) и говоритъ о суммованіи числовыхъ рядовъ. Обращаетъ на себя внима-

---

[1]) Цитировано у *Gow* (p. 89) изъ *Philopatris*, 12.

[2]) *Gow*, pp. 90, 91.

[3]) *Friedlein*, p. 78; *Cantor*, Vol. I., p. 402.

ніе отсутствіе правилъ вычисленія, рѣшеній задачъ и практической ариѳметики. Никомахъ приводитъ слѣдующее важное предложеніе. Всѣ кубическія числа равны суммамъ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ. Такъ, $8 = 2^3 = 3 + 5$; $27 = 3^3 = 7 + 9 + 11$; $64 = 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$.

Въ сочиненіяхъ Никомаха, Ямвлиха, Ѳеона Смирнскаго, Ѳимарида и другихъ мы находимъ изысканія, принадлежащія по природѣ своей къ алгебрѣ. Ѳимаридъ въ одномъ мѣстѣ употребляетъ греческое слово, означающее „неизвѣстное количество"; изъ того, какъ онъ пользуется этимъ словомъ, видно, что приближалось уже то время, когда алгебра должна была выдѣлиться въ особую науку. Особенно интересно слѣдить за развитіемъ алгебры по ариѳметическимъ эпиграммамъ въ *Палатинской Анѳологіи*, содержавшей до 50 задачъ, приводящихъ къ линейнымъ уравненіямъ [1]). До введенія алгебры задачи эти предлагались въ качествѣ загадокъ. Въ задачѣ 23 даются времена, потребныя для наполненія резервуара четырьмя источниками въ отдѣльности, и требуется опредѣлить время, въ теченіе котораго всѣ четыре источника вмѣстѣ могутъ наполнить резервуаръ [2]). Задача 9: какая часть сутокъ прошла, если оставшаяся часть составляетъ $2\frac{2}{3}$ прошедшей? Иногда въ число этихъ эпиграммъ включается и знаменитая „задача о быкахъ", которую, какъ говорятъ, Архимедъ предложилъ александрійскимъ математикамъ [3]). Это трудная задача, и къ тому же неопредѣленная. Въ первой ея части требуется найти въ цѣлыхъ числахъ восемь неизвѣстныхъ по семи только уравненіямъ. Вотъ какъ Гоу передаетъ условіе этой задачи: У солнца было стадо быковъ и коровъ, различныхъ цвѣтовъ. (1) Изъ числа быковъ, число бѣлыхъ (W) составляло $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$ синихъ (B) и желтыхъ (Y); число B со-

[1]) Эти эпиграммы были написаны по гречески, вѣроятно, около времени царствованія Константина Великаго. Нѣмецкій переводъ ихъ см. въ сочиненіи *G. Wertheim.* Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria, Leipzig, 1890, pp. 330—344.

[2]) *Wertheim,* цит. соч., p. 337.

[3]) Вопросъ о томъ, относится ли эта задача ко времени Архимеда или къ болѣе позднему времени, разсмотрѣнъ въ сочиненіи *T. L. Heath.* Diophantos of Alexandria, Cambridge, 1885, pp. 142—147.

ставляло $(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$ числа $У$ и числа пестрыхъ быковъ (P) *); число P составляло $(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$ чиселъ W и $У$. (2) Изъ числа коровъ, имѣвшихъ тѣ же цвѣта (w, b, y, p), $w=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$ $(B+b)$; $b=(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$ $(P+p)$; $p=(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ $(У+y)$; $y=(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$ $(W+w)$. Найти число быковъ и коровъ. Рѣшеніе этой задачи приводитъ къ чрезвычайно большимъ числамъ, но чтобы еще увеличить ея трудность, былъ прибавленъ другой рядъ дополнительныхъ условій, приводящій къ неопредѣленному уравненію второй степени.

Задачи *Палатинской Анѳологіи*, хотя и могутъ, по большей части, поставить въ тупикъ того, кто знакомъ лишь съ ариѳметическими пріемами рѣшенія задачъ, не представляютъ трудности для человѣка, знакомаго съ алгеброй. Такія задачи были распространены во время Діофанта и, безъ сомнѣнія, служили сильнымъ возбуждающимъ средствомъ для ума.

Діофантъ, одинъ изъ послѣднихъ александрійскихъ математиковъ, обыкновенно считается очень плодотворнымъ алгебристомъ [1]). Онъ умеръ около 330 г. по Р. Х. Дожилъ онъ до 84-хъ лѣтняго возраста, какъ извѣстно изъ эпитафіи слѣдующаго содержанія: Діофантъ провелъ $\frac{1}{6}$ своей жизни въ дѣтствѣ, $\frac{1}{12}$ въ юности, слѣдующую затѣмъ $\frac{1}{7}$ своей жизни былъ холостымъ; черезъ шесть лѣтъ послѣ его женитьбы у него родился сынъ, который умеръ на четыре года раньше своего отца и дожилъ до возраста, вдвое меньшаго, чѣмъ лѣта его отца. Въ этой эпитафіи содержится почти все, что намъ извѣстно о Діофантѣ. Мы не знаемъ навѣрно, когда онъ умеръ, и ничего не знаемъ о его происхожденіи и мѣстѣ его рожденія. Если бы сочиненія его не были написаны по гречески, никто и не подозрѣвалъ бы, что они произведеніе греческаго ума. Его главное, образцовое произведеніе, *Ариѳметика* [написанное, какъ говорятъ, въ тринадцати книгахъ, изъ коихъ только шесть (семь?) [2]) дошли

*) По англійски, бѣлый — white, синій — blue, желтый — yellow, пестрый – piebald. *Прим. редакт.*

[1]) „Насколько труды Діофанта были самобытны?" см. Heath, op. cit. pp. 133—159.

[2]) *Cantor*. Vol I., pp. 456, 437

до насъ] проникнуто духомъ, настолько отличнымъ отъ духа великихъ классическихъ сочиненій, написанныхъ во времена Евклида, насколько чистая геометрія отличается отъ чистаго анализа. Между греками у Діофанта не было ни одного выдающагося предшественника, ни одного выдающагося послѣдователя. Не будь его сочиненій, намъ бы пришлось сказать, что греческій умъ не создалъ въ области алгебры ничего замѣчательнаго. До открытія папируса Ахмеса, *Ариѳметика* Діофанта была древнѣйшимъ извѣстнымъ намъ трудомъ по алгебрѣ. Діофантъ вводитъ понятіе объ алгебрическомъ уравненіи, выраженномъ въ символахъ. Изложеніе у Діофанта поставлено внѣ всякой связи съ геометріей, — чисто аналитическое. Онъ первый говоритъ, что „отнимаемое число, будучи умножено на отнимаемое число, даетъ число прибавляемое.“ Это предложеніе онъ примѣняетъ къ такимъ разностямъ, какъ $(2x - 3)(2x - 3)$, произведеніе которыхъ онъ находитъ, не прибѣгая къ геометріи. Такія тожества, какъ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, которыя Евклидъ возводитъ въ высокое достоинство геометрическихъ теоремъ, являются у Діофанта простѣйшими слѣдствіями законовъ алгебрическихъ дѣйствій. Діофантъ представляетъ неизвѣстное количество x символомъ ς', квадратъ неизвѣстнаго x^2 обозначаетъ черезъ $\delta^{\bar{v}}$, x^3 черезъ $\varkappa^{\bar{v}}$, x^4 черезъ $\delta\delta^{\bar{v}}$. Знакомъ вычитанія служитъ ему ↑, знакомъ равенства ι *). Написанные рядомъ символы должны быть сложены. Иногда онъ не пользуется этими символами и описываетъ дѣйствія словами и притомъ въ тѣхъ случаяхъ, когда употребленіе символовъ больше соотвѣтствовало бы цѣли. Въ многочленахъ положительные члены пишутся раньше всѣхъ отрицательныхъ. Такъ x^3-5x^2+8x+1 въ обозначеніяхъ Діофанта должно быть написано такъ: [1]) $\varkappa^{\bar{v}}\overline{\alpha}\,\varsigma^{o\iota}\overline{\eta}$ ↑ $\delta^{\bar{v}}\overline{\varepsilon}\,\mu^{o}\overline{\alpha}$. Числовые коэффиціенты слѣдуютъ здѣсь за символами неизвѣстныхъ.

Слѣдуетъ обратить особенное вниманіе на то обстоятельство, что у Діофанта нѣтъ основного алгебрическаго понятія объ *отрицательныхъ* числахъ. Разсматривая выра-

*) См прибавленіе въ концѣ книги.

[1]) *Heath*, op. cit., p. 72.

женіе $2x - 10$ онъ избѣгаетъ, какъ лишенные смысла, всѣ случаи, когда $2x < 10$. Такъ же поступаетъ онъ, напримѣръ, въ *Зад. 16 Кн. I Ариѳметики:* „Найти такія три числа, чтобы суммы каждыхъ двухъ изъ нихъ были равны даннымъ". Если данныя числа суть a, b, c, то одно изъ искомыхъ чиселъ равно $\frac{1}{2}(a+b+c)-c$. Когда $c > \frac{1}{2}(a+b+c)$, результатъ этотъ не имѣетъ для Діофанта никакого смысла. Поэтому онъ подчиняетъ условіе задачи слѣдующему ограниченію: „но полусумма трехъ данныхъ чиселъ должна быть больше каждаго изъ нихъ." Діофантъ не даетъ рѣшеній въ общей формѣ. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ для данныхъ чиселъ приняты частныя значенія 20, 30, 40.

Въ задачахъ, приводящихъ къ совмѣстнымъ уравненіямъ, Діофантъ искусно пользуется только однимъ символомъ для обозначенія неизвѣстныхъ количествъ. Эта скудость обозначеній возмѣщается во многихъ случаяхъ только искусствомъ въ выборѣ неизвѣстнаго. Часто онъ употребляетъ методъ, нѣсколько напоминающій индусское „ложное положеніе". Неизвѣстному придается предварительно значеніе, удовлетворяющее только одному или двумъ изъ предложенныхъ условій. Это приводитъ къ выраженіямъ явно невѣрнымъ, но внушающимъ, тѣмъ не менѣе, мысль о какой-нибудь уловкѣ, съ помощью которой можно получить одно изъ вѣрныхъ рѣшеній [1]).

Діофантъ умѣлъ рѣшать квадратныя уравненія, но въ дошедшихъ до насъ книгахъ *Ариѳметики* онъ нигдѣ не объясняетъ способа рѣшенія. Достойно вниманія то обстоятельство, что онъ всегда даетъ только одинъ изъ двухъ корней, даже тогда, когда оба корня суть положительныя числа. Не принимаетъ онъ также, какъ отвѣта на задачу, отрицательнаго или ирраціональнаго числа.

Только первая книга *Ариѳметики* посвящена опредѣленнымъ уравненіямъ. При рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій (второй степени) онъ въ особенности обнаруживаетъ свою удивительную изобрѣтательность. Его необыкновенное искусство состоитъ, однако, не столько въ открытіи общихъ методовъ, сколько въ умѣніи приводить всякаго рода урав-

[1]) *Gow*, pp. 110, 116, 117.

ненія къ частнымъ видамъ, которые онъ знаетъ, какъ рѣшать. Для каждой изъ его многочисленныхъ и разнообразныхъ задачъ у него есть особый, отличный отъ другихъ, способъ рѣшенія, который оказывается часто безполезнымъ даже въ примѣненіи къ рѣшенію задачи, по содержанію наиболѣе близкой къ данной. „Поэтому современному математику, послѣ изученія 100 рѣшеній Діофанта, трудно рѣшить 101-ую задачу..... Діофантъ скорѣе ослѣпляетъ, чѣмъ приводитъ въ восторгъ“ [1]).

Отсутствіе у Діофанта общихъ методовъ для рѣшенія неопредѣленныхъ задачъ заставило новѣйшихъ изслѣдователей этого предмета, какъ Эйлеръ, Лагранжъ, Гауссъ, начать изслѣдованіе сызнова. Въ смыслѣ общихъ методовъ, имъ нечему было учиться у Діофанта. Результатомъ этого явилось то, что современная теорія чиселъ совершенно отлична отъ Діофантова Анализа; это несомнѣнно болѣе высокая и благородная наука. Новѣйшіе послѣдователи Діофанта обыкновенно проявляютъ тѣ же слабости, что и ихъ учитель, и поэтому имъ и не удалось сдѣлать значительныхъ вкладовъ въ науку о числахъ.

Особый интересъ представляетъ для насъ методъ, которому слѣдовалъ Діофантъ при рѣшеніи опредѣленнаго линейнаго уравненія. Вотъ какія даетъ онъ указанія: „Если теперь, въ какой нибудь задачѣ, тѣ же степени неизвѣстнаго встрѣчаются въ обѣихъ частяхъ уравненія, но съ разными коеффиціентами, то мы должны вычитать равныя изъ равныхъ, пока не получимъ одного члена, равнаго одному числу. Если въ одной части или въ обѣихъ частяхъ есть члены съ отрицательными коеффиціентами, то эти члены должны быть прибавлены къ обѣимъ частямъ, такъ чтобы въ обѣихъ частяхъ были только положительные члены. Затѣмъ снова нужно отнимать равныя отъ равныхъ, пока не останется только по одному члену въ каждой части“ [2]). Такимъ образомъ то, чего мы теперь достигаемъ перенесе-

---

[1]) *Hankel.* p. 165. Слѣдуетъ замѣтить, что *Heath,* op. cit. pp. 83 – 120, не признаетъ приговора Ганкеля и дѣлаетъ попытку дать общій очеркъ Діофантовыхъ методовъ.

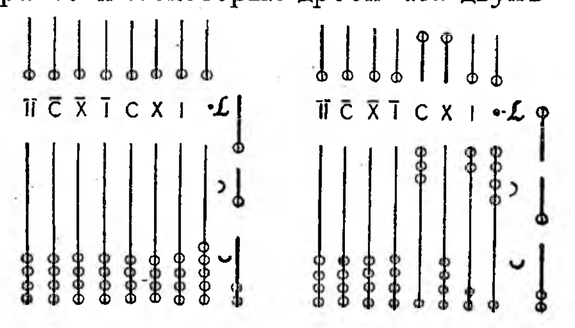
[2]) *Вертгеймовъ* Діофантъ, стр. 7.

ніемъ членовъ, приведеніемъ и дѣленіемъ на коэффиціентъ при x, Діофантъ производилъ посредствомъ сложенія и вычитанія. Нужно замѣтить, что у Діофанта, какъ впрочемъ и у всѣхъ древнихъ писателей, нѣтъ понятія о *частномъ*. Дѣйствіе *дѣленія* нигдѣ не производится. Когда приходилось дѣлить одно число на другое, къ отвѣту приходили путемъ послѣдовательныхъ вычитаній [1]).

РИМЪ.

О римскихъ способахъ вычисленія намъ извѣстно больше, чѣмъ о греческихъ или египетскихъ. Счету съ помощью абака обучали въ школахъ. Различные писатели упоминаютъ о камешкахъ и разграфленныхъ столбцами и покрытыхъ пылью абакахъ. Этрусскій (?) памятникъ, хранящійся теперь въ Парижѣ, изображаетъ вычислителя, держащаго въ лѣвой рукѣ счетную доску съ числовыми знаками, расположенными въ столбцы, тогда какъ правой рукой онъ кладетъ на столъ камешки [2]).

Римляне употребляли еще другого рода абакъ, состоящій изъ металлической доски, на которой были желобки съ подвижными пуговками. Съ помощью такой доски можно было представить всѣ цѣлыя числа между 1 и 9 999 999, а равно и нѣкоторыя дроби. На двухъ предлагаемыхъ фигурахъ (заимствованныхъ у *Фридлейна*, Fig. 21) прямыя линіи представляютъ желобки, а кружки—пуговки. Римскія цифры указываютъ значеніе каждой пуговки на соотвѣтствующемъ желобкѣ внизу; пуговка на болѣе короткомъ желобкѣ вверху имѣетъ значеніе въ пять разъ большее.



[1]) *Nesselmann*, p. 112; *Friedlein*, p. 79.

[2]) *Cantor*, Vol. I, p. 493.

Такъ $\overline{\text{II}}$ = 1 000 000; отсюда слѣдуетъ, что каждая входящая въ счетъ пуговка въ первомъ длинномъ желобкѣ слѣва означаетъ 1 000 000, пуговка же, находящаяся въ верхнемъ лѣвомъ желобкѣ, означаетъ 5 000 000. Подобнымъ же образомъ опредѣляется значенiе и другихъ желобковъ, нумерованныхъ римскими цифрами. Восьмой длинный желобокъ слѣва (на которомъ 5 пуговокъ) представляетъ двѣнадцатиричныя дроби, причемъ каждая пуговка представляетъ $\frac{1}{12}$, пуговка же, расположенная надъ точкой, означаетъ $\frac{6}{12}$. Въ девятой колоннѣ верхняя пуговка представляетъ $\frac{1}{24}$ средняя $\frac{1}{48}$ и двѣ нижнiя по $\frac{1}{72}$ каждая. Первая изъ предлагаемыхъ нами фигуръ представляетъ расположенiе пуговокъ до начала дѣйствiя; вторая фигура представляетъ число $852\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}$. Не трудно при этомъ съ перваго взгляда отличить пуговки, входящiя въ счетъ, отъ тѣхъ, которыя остаются безъ употребленiя. Считаются здѣсь: одна пуговка надъ C (=500), три пуговки подъ C (=300); одна пуговка надъ X (=50); двѣ пуговки подъ I (=2); четыре пуговки, обозначающихъ двѣнадцатыя доли (=$\frac{1}{3}$), и пуговка, означающая $\frac{1}{24}$.

Предположимъ теперь, что нужно было прибавить $10318\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{48}$ къ $852\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}$. Производящiй дѣйствiе могъ начинать его, по произволу, съ единицъ высшаго или низшаго разряда. Труднѣйшей частью такого дѣйствiя являлось, конечно, сложенiе дробей. Въ разсматриваемомъ случаѣ пуговка, означающая $\frac{1}{48}$, пуговка надъ точкой и три пуговки подъ точкой служили для обозначенiя суммы $\frac{3}{4}\,\frac{1}{48}$. Прибавленiе 8 вводило въ счетъ всѣ пуговки надъ I и подъ I; въ суммѣ получалось 10 единицъ. Ихъ всѣ передвигали внизъ, но зато передвигали вверхъ одну пуговку, находящуюся въ желобкѣ, расположенномъ подъ цифрою X; прибавленiе 300 къ 800 производилось передвиженiемъ внизъ всѣхъ пуговокъ надъ цифрой и подъ цифрой C, кромѣ одной нижней пуговки, и передвиженiемъ вверхъ одной пуговки подъ $\overline{\text{I}}$; прибавленiе 10 000 приводилось къ передвиженiю вверхъ одной пуговки подъ цифрой $\overline{\text{X}}$. При вычитанiи поступали подобнымъ же образомъ (*).

(*) Описанный въ текстѣ абакъ не отличается, такимъ образомъ, по существу отъ принятыхъ у насъ торговыхъ счетовъ. *Прим. редакт.*

Умноженіе можно было производить различными способами. Въ случаѣ умноженія $25\frac{1}{3}$ на $38\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}$ абакъ могъ, напримѣръ, показывать послѣдовательно слѣдующія числа: $600\,(=30\,.\,20)$, $760\,(=600+20\,.\,8)$, $770\,(=760+\frac{1}{2}\,.\,20)$, $770\frac{10}{12}$ $(=770+\frac{1}{24}\,.\,20)$, $920\frac{10}{12}\,(=770\frac{10}{12}+30\,.\,5)$, $960\frac{10}{12}\,(=920\frac{10}{12}+8\,.\,5)$, $993\frac{1}{3}\,(=960\frac{10}{12}+\frac{1}{2}\,.\,5)$, $963\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}\,(=963\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\,.\,5)$, $973\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}\,(=963\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}$ $+\frac{1}{3}\,.\,30)$, $976\frac{2}{12}\,\frac{1}{24}\,(=973\frac{1}{2}\,\frac{1}{24}+8\,.\,\frac{1}{3})$, $976\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}\,(=976\frac{2}{12}\,\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{3})$, $976\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{72}\,(=976\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\,.\,\frac{1}{24})$ [1]).

При дѣленіи абакомъ пользовались, чтобы представить остатокъ, получаемый при вычитаніи изъ дѣлимаго, дѣлителя или нѣкотораго кратнаго дѣлителя, выбраннаго сообразно съ удобствами вычисленія. Процессъ этотъ былъ сложенъ и труденъ. Эти способы вычисленія съ помощью абака ясно показываютъ, какъ можно выполнять умноженіе или дѣленіе посредствомъ ряда сложеній и вычитаній. Можно подозрѣвать, что при этомъ прибѣгали къ вычисленіямъ въ умѣ и къ таблицѣ умноженія. Быть можетъ пользовались также и счетомъ на пальцахъ. Во всякомъ случаѣ умноженіе и дѣленіе большихъ чиселъ было, вѣроятно, не подъ силу обыкновеннымъ вычислителямъ. Иногда трудности вычисленія обходили, пользуясь ариѳметическими таблицами, изъ которыхъ можно было заимствовать требуемую сумму, разность или произведеніе двухъ чиселъ. Таблицы такого рода были составлены *Викторіемъ* Аквитанскимъ, писателемъ хорошо извѣстнымъ своимъ *пасхальнымъ канономъ,* правиломъ для нахожденія точнаго времени празднованія Пасхи, изданнымъ въ 457 г. по Р. Х. Таблицы Викторія содержатъ своеобразныя обозначенія для дробей, которыми продолжали пользоваться въ теченіе всѣхъ среднихъ вѣковъ [2]). Дроби очень часто встрѣчаются у римлянъ при денежныхъ расчетахъ.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на пристрастіе римлянъ къ двѣнадцатиричнымъ дробямъ. Почему предпочитали они двѣнадцатиричныя дроби десятичнымъ? Безъ сомнѣнія потому, что десятичное дѣленіе мѣръ и вѣсовъ казалось имъ неестественнымъ. Въ обыденныхъ дѣлахъ всего чаще при-

---

[1]) *Friedlein,* p. 89.

[2]) См. *Friedlein,* pp. 93—98.

ходится дѣлить единицы на 2, 3, 4, 6 равныхъ частей, а двѣнадцатиричныя дроби даютъ возможность легче выразить эти части. Въ двѣнадцатыхъ доляхъ онѣ представляютъ $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ цѣлаго; въ десятыхъ доляхъ части эти суть $\frac{5}{10}$, $\frac{3\frac{1}{2}}{10}$, $\frac{2\frac{1}{2}}{10}$, $\frac{1\frac{2}{3}}{10}$. Въ противность обычаю грековъ, римляне употребляли конкретныя дроби. Римскій *as,* первоначально мѣдная монета, вѣсившая одинъ фунтъ, раздѣлялась на 12 *unciae.* Отвлеченная дробь $\frac{11}{12}$ выражалась правильно словомъ *deunx* (= *de uncia,* т. е. *as* [1] безъ *uncia* [$\frac{1}{12}$]); дробь $\frac{5}{12}$ назывались *quincunx* (= *quinque* [пять] *unciae*); такимъ образомъ всякая римская дробь носила особое названіе. Складывать и вычитать такія дроби было легко. Вычисленія съ дробями были главнымъ предметомъ при преподаваніи ариѳметики въ римскихъ школахъ [1]). Горацій, можетъ быть въ воспоминаніе о времени, проведенномъ имъ самимъ въ школѣ, приводитъ слѣдующій разговоръ учителя съ ученикомъ (Ars poetica, V. 326—330): „Пусть сынъ Альбина скажетъ мнѣ, сколько останется, если отъ пяти унцій [т. е. $\frac{5}{12}$] отнять одну унцію [т. е. $\frac{1}{12}$]; ну-ка, можешь ли ты отвѣтить? ‘Одна треть’. Хорошо; ты сумѣешь беречь свое имущество. А если прибавить еще одну унцію [т. е. $\frac{1}{12}$], то сколько это составитъ? ‘Половину’.“

Разсматривая конкретныя дроби, римляне безсознательно напали на несомнѣнно очень хорошую въ педагогическомъ отношеніи мысль. Римскіе ученики изучали дроби въ связи съ деньгами, вѣсами и мѣрами. Мы можемъ предположить, что для нихъ дроби имѣли больше смысла, чѣмъ тотъ, который заключается въ опредѣленіи „broken number“ (раздробленное число), обыкновенно приводимомъ въ старыхъ англійскихъ учебникахъ ариѳметики *).

Одинъ изъ послѣднихъ римскихъ писателей былъ *Боэтій (Boethius)* (ум. въ 524 г.), извѣстный въ исторіи математики, какъ авторъ сочиненія *De Institutione Arithmetica,* представляющаго по существу переводъ ариѳметики Никомаха, хотя нѣкоторые изъ прекраснѣйшихъ ариѳметиче-

---

[1]) *Hankel,* pp. 58, 59.

*) См. прибавленіе въ концѣ книги.

скихъ выводовъ, встрѣчающихся въ подлинникѣ, выпущены Боэтіемъ. Историческое значеніе этого перевода заключается въ томъ распространеніи, которое онъ получилъ впослѣдствіи въ Западной Европѣ.

Римскіе законы о наслѣдствѣ давали поводъ къ составленію многочисленныхъ ариѳметическихъ задачъ. Слѣдующій примѣръ, интересный и самъ по себѣ, представляетъ еще особый интересъ, потому что онъ помогъ впослѣдствіи найти тотъ источникъ, изъ котораго истекли ариѳметическія знанія въ Западной Европѣ: Нѣкто, умирая, оставилъ жену въ ожиданіи ребенка и завѣщалъ, въ случаѣ рожденія сына, отдать ему $\frac{2}{3}$ своего имѣнія, матери же $\frac{1}{3}$; въ случаѣ же рожденія дочери, она должна получить $\frac{1}{3}$, а мать ея $\frac{2}{3}$ имѣнія мужа. Вдова завѣщателя родила близнецовъ, мальчика и дѣвочку. Какъ нужно раздѣлить имѣніе, чтобы удовлетворить условіямъ завѣщанія? Знаменитый римскій юристъ Сальвіанъ Юліанъ рѣшилъ, что имѣніе должно быть раздѣлено на семь равныхъ частей, изъ коихъ четыре должно перейти къ сыну, двѣ къ женѣ и одно къ дочери.

Кромѣ (вѣроятнаго) усовершенствованія счетной доски и развитія двѣнадцатиричныхъ дробей, римляне ничего не сдѣлали для ариѳметики. Алгебра Діофанта осталась имъ неизвѣстной. У нихъ, какъ и у всѣхъ древнихъ народовъ, числовыя выкладки были длинны и утомительны, потому что они были лишены благодѣтельнаго знанія совершенной системы числовыхъ обозначеній съ ея нулемъ и принципомъ помѣстнаго значенія.

Геометрія и Тригонометрія.

Египетъ и Вавилонія.

Грубые начатки опытной геометріи принадлежатъ, должно быть, какъ и искусство счета, къ глубокой древности. Мы можемъ подозрѣвать, что древнѣйшіе историческіе памятники, восходящіе до 2500 г. до Р. Х., представляютъ работу мысли въ сравнительно новѣйшія времена. Папирусъ Ахмеса и египетскія пирамиды являются, вѣроятно, самыми ранними свидѣтелями существованія науки геометріи. Мы находимъ, однако, болѣе удобнымъ начать съ Вавилоніи. Древняя наука тѣсно связана съ суевѣріемъ. Мы имѣемъ доказательства того, что въ Вавилоніи геометрическія фигуры употреблялись при гаданіи [1]). Между этими фигурами есть пара параллельныхъ линій, квадратъ, фигура со входящимъ угломъ и неполная фигура, которая, какъ полагаютъ, представляла три концентрическихъ треугольника съ соотвѣтственно параллельными сторонами. Сопровождающій эти фигуры текстъ содержитъ сумерійское слово *тим*, что значило „линія" первоначально „веревка"; на основаніи этого можно сдѣлать предположеніе, что вавилоняне, какъ и египтяне, употребляли веревки для измѣренія разстояній и для опредѣленія нѣкоторыхъ угловъ. Вавилонскій знакъ ∗ связанъ, какъ полагаютъ, съ дѣленіемъ круга на шесть равныхъ частей и (такъ какъ вавилоняне дѣлили кругъ на 360 градусовъ) съ происхожденіемъ шестидесятичной системы *). Что вавилонянамъ было извѣстно это

[1]) *Cantor*, Vol. I., pp. 98—100.

*) Ср. прим. на страницѣ 11. *Прим. редакт.*

дѣленіе на шесть частей (вѣроятно, посредствомъ шестикратнаго приложенія радіуса), слѣдуетъ изъ разсмотрѣнія шести спицъ въ колесѣ царской колесницы, изображенной на рисункѣ, найденномъ въ развалинахъ Ниневіи. Какъ и евреи (1 Цар. VII, 23), вавилоняне принимали за отношеніе окружности къ діаметру число 3, значеніе явно неточное. У нихъ нѣтъ никакихъ слѣдовъ геометрическихъ доказательствъ. „За немногими исключеніями, въ восточномъ умѣ способность созерцать затемняетъ способность мыслить строго раціонально и логически".

Мы начнемъ нашъ обзоръ египетской геометріи съ геометричестихъ задачъ, встрѣчающихся въ папирусѣ Ахмеса среди ариѳметическихъ вопросовъ. Вычисленіе вмѣстимости житницъ предшествуетъ опредѣленію площадей [1]). Не зная формы житницъ, мы не можемъ провѣрить правильности вычисленій ихъ вмѣстимости, но въ плоской геометріи намъ обыкновенно помогаютъ приводимыя Ахмесомъ фигуры. Онъ разсматриваетъ площади земельныхъ участковъ, имѣющихъ форму квадрата, прямоугольника, равнобедреннаго треугольника, равнобочной трапеціи и круга. Примѣръ № 44 даетъ число 100 для выраженія площади квадрата, сторона котораго равна 10. Въ примѣрѣ № 51 начерчена фигура равнобедреннаго треугольника, стороны котораго равны 10 саженямъ каждая, а основаніе котораго равно 4 саженямъ; Ахмесъ находитъ для площади число 20. Точное значеніе этой площади есть 19.6. Ахмесъ находитъ приближенное ея значеніе, умножая боковую сторону на половину основанія. Ту же погрѣшность допускаетъ онъ и при опредѣленіи площади равнобочной трапеціи. Полусумма основаній умножается на боковую сторону. Разсматривая размѣры круга, онъ производитъ дѣйствительную *квадратуру;* показываетъ, какъ найти квадратъ равновеликій данному кругу. За сторону этого квадрата принимается діаметръ круга, уменьшенный на $\frac{1}{9}$. Получаемое такимъ образомъ приближеніе довольно точно, потому что, принимая радіусъ за единицу, мы получимъ для стороны квадрата число $\frac{16}{9}$, а для площади его $(\frac{16}{9})^2 = 3.1604\ldots$

[1]) *Gow,* pp. 126—130.

Кромѣ этихъ задачъ, въ папирусѣ Ахмеса есть другія, касающіяся пирамидъ, при рѣшеніи которыхъ авторъ обнаруживаетъ нѣкоторыя свѣдѣнія о подобныхъ фигурахъ, о пропорціи и, можетъ быть, зачаточныя свѣдѣнія по тригонометріи [1]).

Кромѣ папируса Ахмеса, существованіе геометріи у древнихъ египтянъ доказывается фигурами, находящимися на стѣнахъ ихъ построекъ. Стѣна разграфлялась на квадраты или другія прямолинейныя фигуры, по которымъ и писали красками картины [2]).

Греческій философъ Демокритъ (жившій приблизительно 460 — 370 г. до Р. Х.), какъ говорятъ, сказалъ: „въ построеніи плоскихъ фигуръ . . . никто еще не превзошелъ меня, даже и такъ называемые египетскіе *Гарпедонапты*". Канторъ указалъ на то, что слово „harpedonaptae" значитъ „натягиватели веревокъ" [3]). Это, вмѣстѣ съ другими указаніями, привело его къ тому заключенію, что при закладкѣ храмовъ египтяне опредѣляли, посредствомъ точнаго астрономическаго наблюденія, полуденную линію; затѣмъ они строили линію, составляющую съ первой прямые углы при посредствѣ веревки, натянутой около трехъ деревянныхъ кольевъ, расположенныхъ такъ, чтобы три стороны образованнаго такимъ образомъ треугольника относились между собой, какъ 3 : 4 : 5, и такъ, чтобы одинъ изъ катетовъ этого прямоугольнаго треугольника совпадалъ съ полуденной линіей. Тогда другой катетъ давалъ линію востока и запада, что позволяло правильно оріентировать храмъ. Согласно кожаной рукописи, хранящейся въ Берлинскомъ Музеѣ, къ „натягиванію веревки" прибѣгали еще въ такія раннія времена, какъ время царствованія Аменемхата I. Если объясненіе Кантора вѣрно, то отсюда слѣдуетъ, что еще за двѣ тысячи лѣтъ до начала нашей эры *) египтяне хорошо знали извѣстное свойство прямоугольнаго треугольника, котораго стороны находятся въ отношеніи 3 : 4 : 5.

---

[1]) См. *Cantor*, Vol. I., pp. 58 60; *Gow*, p. 128.

[2]) См. рисунки, воспроизведенные у *Кантора*, Vol. I, p. 66.

[3]) *Тамъ же*, стр. 62

*) Смотр. прибавленіе въ концѣ книги.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что египетская геометрія процвѣтала уже въ очень раннія времена. Какихъ успѣховъ достигла она въ послѣдующіе вѣка? Въ 257 г. до Р. Х. состоялась закладка храма Гора въ Эдфу, въ Верхнемъ Египтѣ. Около 100 г. до Р. Х. число участковъ земли, принадлежавшихъ жрецамъ, и площади этихъ участковъ были записаны іероглифами на стѣнахъ храма. Неточная формула Ахмеса для площади равнобочной трапеціи прилагается здѣсь ко всякой трапеціи, какъ бы она ни была неправильна. Такимъ образомъ формулы, употреблявшіяся болѣе чѣмъ за 2000 лѣтъ до Р. Х., давали болѣе точныя приближенія, чѣмъ тѣ, которыми пользовались черезъ два столѣтія послѣ Евклида! Нельзя противиться тому выводу, что египтяне походили на китайцевъ по своей *склонности къ застою* не только въ формахъ государственнаго правленія, но и въ наукѣ. Объясненія этого обстоятельства искали въ томъ фактѣ, что ихъ открытія въ математикѣ, равно какъ и въ медицинѣ, заносились въ раннія времена въ ихъ священныя книги, и что, въ послѣдующіе вѣка, считалось ересью измѣнять или увеличивать заключающіяся въ нихъ знанія. Такимъ образомъ самыя книги преграждали имъ путь къ прогрессу.

Египетская геометрія есть главнымъ образомъ, хотя и не совсѣмъ, геометрія площадей: измѣреніе плоскихъ фигуръ и тѣлъ составляетъ главную ея часть. Эту практическую геометрію едва ли можно назвать *наукой*. Напрасно стали бы мы искать въ ней теоремъ и доказательствъ или логической системы, основанной на аксіомахъ и постулатахъ. Нѣкоторыя изъ правилъ египетской геометріи имѣютъ, очевидно, чисто эмпирическое происхожденіе.

Если вѣрить свидѣтельству грековъ, началомъ египетской геометріи послужило измѣреніе земельныхъ участковъ, къ которому египтяне должны были постоянно прибѣгать вслѣдствіе частыхъ разливовъ Нила.

ГРЕЦІЯ.

Около седьмого вѣка до Р. Х. между Греціей и Египтомъ возникли оживленныя сношенія, какъ торговыя, такъ и духовныя. Какъ въ наше время американцы отправляются для научныхъ занятій въ Германію, такъ и греческіе ученые въ раннія времена посѣщали страну пирамидъ. Ѳалесъ, Энопидъ, Пиѳагоръ, Платонъ, Демокритъ, Евдоксъ—всѣ сидѣли у ногъ египетскихъ жрецовъ и слушали ихъ ученіе. Греческая культура, такимъ образомъ, не вполнѣ самобытна, и, однако, она возбуждаетъ въ насъ восторженное удивленіе. Умозрительный духъ грека сразу переступилъ границы тѣхъ вопросовъ, которые касаются лишь практическихъ потребностей обыденной жизни; онъ проникъ въ область идеальныхъ отношеній между вещами и съ особымъ наслажденіемъ предавался изученію науки, *какъ таковой*. По этой причинѣ греческой геометріей всегда будутъ восхищаться и ей будутъ удивляться, несмотря на ея ограниченность и ея недостатки.

Евдемъ, ученикъ Аристотеля, написалъ исторію геометріи. Эта исторія утеряна, но до насъ дошли извлеченія изъ нея, приведенныя Прокломъ въ его комментаріи на Евклида; изъ этихъ извлеченій мы можемъ заимствовать наиболѣе достовѣрныя свѣдѣнія о греческой геометріи въ раннія времена. Упоминая объ этомъ источникѣ, мы будемъ называть его *Евдемовымъ Обзоромъ*.

I. *Іонійская школа.* Изученіе геометріи было введено въ Греціи *Ѳалесомъ* изъ Милета (640—556 до Р. Х.), однимъ изъ „семи мудрецовъ". Торговыя дѣла привели его въ Египетъ; духовные интересы заставили его прожить тамъ нѣкоторое время. Плутархъ утверждаетъ, что Ѳалесъ скоро превзошелъ по своимъ знаніямъ египетскихъ жрецовъ и привелъ въ удивленіе царя Амазиса, измѣривъ высоты пирамидъ по отбрасываемымъ ими тѣнямъ. Согласно Плутарху,

измѣреніе это было произведено такъ: длина тѣни пирамиды относится къ тѣни вертикальнаго шеста, поставленнаго рядомъ съ пирамидой, какъ неизвѣстная высота пирамиды относится къ длинѣ этого шеста. Согласно Діогену Лаертійскому, способъ измѣренія былъ другой: высота пирамиды принималась равной длинѣ ея тѣни въ тотъ моментъ, когда тѣнь вертикальнаго шеста дѣлалась равной его длинѣ [1]).

Евдемовъ Обзоръ приписываетъ Ѳалесу открытіе теоремъ о равенствѣ вертикальныхъ угловъ, о равенствѣ угловъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, о томъ, что кругъ дѣлится пополамъ всякимъ діаметромъ, о равенствѣ треугольниковъ по сторонѣ и двумъ прилежащимъ угламъ. Особенно знаменитымъ стало Ѳалесово приложеніе этой послѣдней теоремы къ опредѣленію разстояній кораблей отъ берега. Теорему о томъ, что всѣ углы, вписанные въ полукругъ, прямые, нѣкоторые древніе писатели приписываютъ Ѳалесу, другіе Пиѳагору. Такимъ образомъ, Ѳалесъ положилъ, повидимому, основаніе геометріи линій и угловъ, имѣющей по самому существу своему отвлеченный характеръ, тогда какъ египтяне первоначально имѣли дѣло съ геометріей поверхностей и тѣлъ, по характеру своему эмпирической [2]). Казалось бы, что египетскіе жрецы, предававшіеся изученію геометріи, должны были, по крайней мѣрѣ, *чувствовать* справедливость теоремъ, открытіе которыхъ

---

[1]) Первый методъ предполагаетъ знаніе пропорціональности сторонъ треугольниковъ, коихъ углы соотвѣтственно равны; такого знанія нѣкоторые критики не хотятъ признать за Ѳалесомъ. Первоначальными свѣдѣніями о пропорціяхъ, безъ сомнѣнія, обладалъ Ахмесъ и строители пирамидъ. Алльманъ считаетъ, что тѣ же знанія были и у Ѳалеса, и вообще отводитъ высокое мѣсто ему и его школѣ. См. Greek Geometry from Thales to Euclid by *George Johnston Allman*, Dublin, 1889, p. 14. Гоу (p. 142) также вѣритъ Плутархову разсказу, но Канторъ (I, p. 135) оставляетъ вопросъ открытымъ, тогда какъ Ганкель (p. 90), Бретшнейдеръ, Таннери, Лоріа склонны отрицать, что Ѳалесъ зналъ о подобіи фигуръ. См. Die Geometrie und die Geometer vor Euclides. Ein historischer Versuch, von *C. A. Bretschneider*, Leipzig, 1870, p. 46. La Géométrie Grecque ... par Paul Tannery, Paris, 1887, p. 92. Le Scienze Esatte nell' Antica Grecia, di *Gino Loria*, Modena, 1893, Libro I, p. 25.

[2]) *Allman*, p. 16.

приписывается Өалесу. Мы не сомнѣваемся въ этомъ, но склоняемся къ тому мнѣнію, что Өалесъ, какъ истинный философъ, формулировалъ въ видѣ теоремъ и доказалъ то, справедливость чего другіе только чувствовали. Если признать такое мнѣніе вѣрнымъ, то отсюда слѣдуетъ, что Өалесъ, измѣряя высоты пирамидъ и разстоянія кораблей отъ берега, первый примѣнилъ теоретическую геометрію къ достиженію практическихъ цѣлей. Өалесъ пріобрѣлъ большую извѣстность благодаря предсказанію солнечнаго затменія въ 585 г. до Р. Х. Онъ положилъ начало изученію научной астрономіи. Разсказываютъ, что однажды, глядя на звѣзды, онъ упалъ въ ровъ. Увидѣвъ это, сопровождавшая его старуха воскликнула: „Какъ можешь ты знать, что дѣлается на небѣ, когда ты не видишь того, что дѣлается у тебя подъ ногами".

Къ числу астрономовъ Іонійской школы принадлежатъ Анаксимандръ и Анаксименъ. *Анаксагоръ,* ученикъ Анаксимена, во время заключенія въ темницѣ сдѣлалъ попытку найти квадратуру круга. *Приближенныя значенія* числа π мы находимъ въ раннія времена у египтянъ, вавилонянъ и евреевъ, но первая попытка *точнаго* опредѣленія отношенія окружности къ діаметру, о которой упоминается въ исторіи, принадлежитъ Анаксагору; эту запутанную задачу послѣ него безъ всякаго успѣха пробовали рѣшить тысячи людей. Анаксагоръ, повидимому, не далъ никакого рѣшенія.

II. *Пиөагорейская школа.*—Жизнь Пиөагора (580?—500? до Р. Х.) окутана густымъ миөическимъ туманомъ. Мы можемъ, однако, съ разумнымъ основаніемъ утверждать, что онъ родился въ Самосѣ, изучалъ науки въ Египтѣ и затѣмъ, позднѣе, вернулся на родину. Можетъ быть, посѣтилъ онъ и Вавилонъ. Потерпѣвъ неудачу въ своей попыткѣ основать школу въ Самосѣ, онъ, слѣдуя за теченіемъ цивилизаціи, переселился въ Кротонъ—въ южной Италіи (Великая Греція). Тамъ онъ основалъ Пиөагорейское братство, подчинивъ его уставу, приближающемуся по своимъ особенностямъ къ правиламъ масонскихъ ложъ. Членамъ этого братства запрещалось разглашать открытія и ученія своей школы. Поэтому теперь невозможно сказать, кому

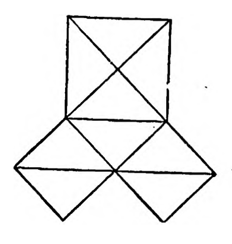
именно слѣдуетъ приписывать различныя открытія пиѳагорейцевъ. Среди пиѳагорейцевъ существовалъ обычай приписывать всѣ открытія великому основателю секты. Сначала пиѳагорейская школа процвѣтала, но потомъ она стала возбуждать подозрѣніе своими мистическими обрядами. Одна изъ политическихъ партій въ нижней Италіи разрушила зданія, принадлежавшія школѣ; Пиѳагоръ бѣжалъ, но былъ убитъ въ Метапонтѣ. Хотя политика и разсѣяла пиѳагорейское братство, но школа продолжала существовать въ теченіе, по крайней мѣрѣ, еще двухъ столѣтій.

Какъ и Ѳалесъ, Пиѳагоръ не писалъ математическихъ сочиненій. *Евдемовъ Обзоръ* говоритъ: „Пиѳагоръ преобразовалъ науку геометріи въ форму свободнаго ученія, ибо онъ разобралъ принципы ея до самаго основанія и изслѣдовалъ ея теоремы невещественнымъ и разумнымъ путемъ“.

Самому Пиѳагору слѣдуетъ приписать открытіе хорошо извѣстнаго свойства прямоугольнаго треугольника. Онъ могъ узнать у египтянъ, что эта теорема справедлива въ томъ частномъ случаѣ, когда стороны треугольника равны соотвѣтственно 3, 4 и 5. Разсказываютъ, что Пиѳагоръ такъ ликовалъ по поводу этого великаго открытія, что принесъ въ жертву гекатомбу вдохновившимъ его музамъ. Что этотъ разсказъ представляетъ собою только легенду, слѣдуетъ изъ того, что пиѳагорейцы вѣрили въ переселеніе душъ и поэтому противились пролитію крови. Чтобы предотвратить возможность такого возраженія, позднѣйшее преданіе новопиѳагорейцевъ замѣняетъ кровавую жертву „быкомъ, сдѣланнымъ изъ муки“! Доказательство закона трехъ квадратовъ, данное у Евклида, I, 47, принадлежитъ самому Евклиду. Доказательство, данное Пиѳагоромъ, не дошло до насъ. Много остроумія было потрачено на догадки о природѣ этого доказательства. Бретшнейдерово предположеніе о томъ, что доказательство Пиѳагора не отличалось существенно отъ доказательства Бхаскары (о которомъ мы будемъ говорить въ другомъ мѣстѣ), было хорошо принято Ганкелемъ, Алльманомъ, Гоу, Лоріа [1]). Канторъ считаетъ

[1]) См. *Bretschneider,* p. 82; *Allman,* p. 36; *Hankel,* p. 98; *Gow,* p. 155; *Loria,* I, p. 48.

вѣроятнымъ, что первоначальное доказательство заключало въ себѣ разсмотрѣніе частныхъ случаевъ, первымъ изъ которыхъ былъ, можетъ быть, случай равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника; въ этомъ случаѣ теорема могла бы быть доказана такъ, какъ показываетъ прилагаемый чертежъ[1]). Четыре нижніе треугольника, взятые вмѣстѣ равновелики четыремъ верхнимъ. Такое раздѣленіе квадратовъ ихъ діагоналями встрѣчается въ Платоновомъ *Менонѣ* [2]). Со времени возникновенія греческой геометріи было придумано много доказательствъ Пиѳагоровой теоремы [3]).



Характерной чертой *метода* Пиѳагора и его школы является соединеніе геометріи съ ариѳметикой; каждому ариѳметическому факту соотвѣтствуетъ аналогичный фактъ въ области геометріи, и наоборотъ. Такъ, въ связи съ закономъ трехъ квадратовъ, Пиѳагоръ придумалъ правило для нахожденія цѣлыхъ чиселъ, представляющихъ длины сторонъ прямоугольныхъ треугольниковъ: нужно принять число $2n+1$ за длину одной изъ сторонъ, положить число $\frac{1}{2}[(2n+1)^2-1]=2n^2+2n=$ длинѣ другой стороны и $2n^2+2n+1=$ длинѣ гипотенузы. Если $n=5$, то три стороны треугольника равны соотвѣтственно 11, 60, 61. Это правило даетъ только такіе треугольники, гипотенуза каждаго изъ которыхъ превышаетъ на единицу одинъ изъ катетовъ.

Пиѳагору приписываютъ также одно изъ величайшихъ математическихъ открытій древнихъ временъ — открытіе *Ирраціональныхъ Количествъ*. Обыкновенно полагаютъ, что открытіе это пройстекло изъ разсмотрѣнія равнобедреннаго

---

[1]) *Cantor*, I, 172; см. также *Gow*, p. 155 и *Allman*, p. 29.

[2]) *Gow*, p. 174.

[3]) См. *Joh. Jos. Jgn. Hoffmann*. Der Pythagorische Lehrsatz mit zwey und dreyssig theils bekannten, theils neuen Beweisen. Mainz, 1819. См. также *Ю. Випперъ*. Сорокъ шесть доказательствъ Пиѳагоровой теоремы (нѣмецкій переводъ *F. Graaf*, Leipzig, 1880).

прямоугольнаго треугольника [1]). Если принять катетъ такого треугольника за единицу, то гипотенуза, будучи равной $\sqrt{2}$, не сможетъ быть точно представлена никакимъ числомъ. Мы можемъ вообразить себѣ, что и другія числа, скажемъ 7 или $\frac{1}{3}$, были выбраны для представленія катетовъ; какъ въ этихъ случаяхъ, такъ и въ другихъ, въ которыхъ производилось испытаніе, оказалось невозможнымъ найти число, точно измѣряющее длину гипотенузы. Безъ сомнѣнія, послѣ нѣсколькихъ неудачныхъ попытокъ такого рода, „какой-нибудь рѣдкій геній, одинъ изъ тѣхъ, кому дано парить, подобно орлу, надъ обыкновеннымъ уровнемъ человѣческой мысли — можетъ быть, и самъ Пиѳагоръ — пришелъ къ счастливой мысли о томъ, что задача эта неразрѣшима“ [2]).

Такъ какъ никакая геометрическая фигура сама по себѣ не заключаетъ ничего такого, что позволило бы усмотрѣть существованіе ирраціональныхъ количествъ, то открытіе ихъ должно было быть результатомъ чисто отвлеченной мысли. Пиѳагорейцы видѣли въ ирраціональныхъ количествахъ символъ невыразимаго. Говорятъ, что первый, кто разгласилъ ихъ ученіе, потерпѣлъ вслѣдствіе этого кораблекрушеніе, „такъ какъ невыразимое и невидимое должно всегда держать въ тайнѣ“ [3]).

Теорія параллельныхъ линій входитъ въ пиѳагорейское доказательство равенства двумъ прямымъ суммы угловъ треугольника; въ этомъ доказательствѣ проводится линія, параллельная основанію. Этотъ способъ доказательства указываетъ на прогрессъ въ развитіи методовъ геометріи, состоящій въ переходѣ отъ частнаго къ общему: по Гемину, первоначальное доказательство теоремы о суммѣ угловъ треугольника (Ѳалесово?) содержало разсмотрѣніе трехъ

---

[1]) *Allman,* p. 42, считаетъ болѣе правдоподобнымъ предположеніе, что этимъ открытіемъ мы обязаны задачѣ о дѣленіи линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

[2]) *Hankel,* p. 101.

[3]) Ту же исторію о гибели въ морѣ разсказываютъ и про пиѳагорейца Гиппаза, разгласившаго то, что пиѳагорейцы знали о додекаедрѣ.

различныхъ случаевъ: равносторонняго, равнобедреннаго и наконецъ, разносторонняго треугольниковъ [1]).

Евдемъ говоритъ, что пиѳагорейцы изобрѣли задачи, относящіяся къ приложенію площадей, со включеніемъ случаевъ недостатка и избытка, какъ у Евклида VI, 28, 29. Они умѣли также строить многоугольникъ, равновеликій одному данному многоугольнику и подобный другому. Вообще можно сказать, что плоская геометрія пиѳагорейцевъ, какъ и египетская, въ большой мѣрѣ относилась къ площадямъ. Обращаетъ на себя вниманіе отсутствіе въ этой геометріи теоремъ о кругѣ.

Пиѳагорейцы доказали также, что часть плоскости, расположенная вокругъ точки, можетъ быть совершенно заполнена шестью равносторонними треугольниками, четырьмя квадратами или тремя правильными шестиугольниками, такъ что плоскость можетъ быть раздѣлена на фигуры каждаго изъ этихъ родовъ. Въ близкомъ родствѣ съ изученіемъ правильныхъ многоугольниковъ находится изученіе правильныхъ тѣлъ. Къ этому отдѣлу относятся открытія пиѳагорейцевъ въ области стереометріи. Изъ равносторонняго треугольника и квадрата возникаютъ тетраедръ, октаедръ, кубъ и икосаедръ; всѣ эти четыре тѣла были, вѣроятно, извѣстны египтянамъ, которые, во всякомъ случаѣ, безъ сомнѣнія знали первыя три. Въ пиѳагорейской философіи эти тѣла представляютъ соотвѣтственно четыре стихіи вещественнаго міра: огонь, воздухъ, землю и воду. За отсутствіемъ пятой стихіи, открытый впослѣдствіи додекаедръ сталъ представлять самое вселенную. Существуетъ легенда, по которой Гиппазъ погибъ въ морѣ потому, что онъ разгласилъ тайну о „шарѣ съ двѣнадцатью пятиугольниками".

Пиѳагоръ имѣлъ обыкновеніе говорить, что изъ всѣхъ тѣлъ прекраснѣйшее—шаръ; изъ плоскихъ фигуръ—кругъ.

Мы не можемъ съ увѣренностью опредѣлить, какова была степень строгости доказательствъ теоремъ въ Итальянской школѣ. Мы однако не ошибемся, если предполо-

---

[1]) См. *Hankel*, pp. 95, 96.

жимъ, что переходъ отъ эмпирическихъ рѣшеній къ чисто раціональнымъ совершился постепенно и медленно.

Переходя къ позднѣйшимъ пиѳагорейцамъ, мы встрѣчаемся съ именемъ Филолая, написавшаго книгу о пиѳагорейскихъ доктринахъ, которыя онъ сдѣлалъ такимъ образомъ извѣстными всему свѣту. Наконецъ, мы должны упомянуть объ *Архитѣ* изъ Тарента (428 — 347 до Р. Х.), блестящемъ ученомъ, единственномъ великомъ геометрѣ того времени, когда Платонъ открылъ свою школу. Онъ подвинулъ впередъ теорію пропорцій и написалъ сочиненіе объ удвоеніи куба [1]).

III. *Школа софистовъ*. Періоды существованія различныхъ греческихъ математическихъ „школъ" въ значительной мѣрѣ покрываютъ другъ друга. Такъ, дѣятельность пиѳагорейцевъ продолжалась и во времена софистовъ, до самаго открытія Платоновой школы.

Послѣ отраженія персовъ въ битвѣ при Саламинѣ въ 480 г. до Р. Х. и изгнанія финикіянъ и пиратовъ изъ Эгейскаго моря, греческая торговля начала процвѣтать. Аѳины пріобрѣли большое вліяніе и сдѣлались центромъ, къ которому стали тяготѣть ученые. Пиѳагорейцы стали стекаться въ Аѳины; Анаксагоръ привезъ туда Іонійскую философію. Пиѳагорейцы перестали также хранить въ тайнѣ свое ученіе; духъ аѳинской жизни требовалъ, чтобы все совершалось явно [2]). Такъ какъ всѣ домашнія работы производились рабами, то у аѳинянъ было много свободнаго времени. Чтобы отличаться въ публичныхъ спорахъ о философскихъ и научныхъ вопросахъ, аѳиняне нуждались въ образованіи. Возникъ спросъ на учителей, которые назывались *софистами,* или „мудрыми людьми". Софисты не слѣдовали примѣру безкорыстія древнихъ пиѳагорейцевъ и получали плату за свое ученіе. Они обучали преимущественно реторикѣ, но также и философіи, математикѣ и астрономіи.

Геометрія круга, находившаяся въ пренебреженіи у пиѳагорейцевъ, теперь получила должную оцѣнку. Изслѣдо-

[1]) См. *Allman,* pp. 102—127.

[2]) *Allman,* p. 54.

ванія софистовъ вращаются около слѣдующихъ трехъ знаменитыхъ задачъ, которыя должны были быть рѣшены построеніемъ съ помощью только циркуля и линейки:

1) Трисекція всякаго угла или дуги;

2) Удвоеніе куба, т. е. построеніе куба, который по *объему* былъ бы вдвое больше даннаго куба;

3) Квадратура круга, т. е. построеніе квадрата или другой прямолинейной фигуры, точно равновеликой данному кругу.

Безъ сомнѣнія, никакія другія математическія задачи не изучались такъ прилежно и упорно, какъ эти три. Лучшіе греческіе умы направлены были на рѣшеніе ихъ; арабы прилагали къ нимъ свою ученость; многіе изъ лучшихъ математиковъ эпохи Западнаго Возрожденія боролись съ трудностями этихъ задачъ. Искусные и неискусные умы, мудрые и изворотливые люди—всѣ старались побѣдить эти трудности, рѣшить задачи, надъ которыми трудились безуспѣшно лучшія головы прошедшихъ вѣковъ. Наконецъ, въ людскихъ умахъ зародилась та мысль, что пока они будутъ ограничивать себя постулатами, положенными греками въ основаніе требуемаго рѣшенія этихъ задачъ, задачи эти не будутъ допускать рѣшенія. Эта догадка была впослѣдствіи подтверждена строгими доказательствами. Греки требовали рѣшенія этихъ задачъ съ помощью циркуля и линейки, безъ всякихъ другихъ инструментовъ. Другими словами, построенія эти должны были приводить къ фигурамъ, состоящимъ лишь изъ прямыхъ линій и круговъ. Построеніе не считалось *геометрическимъ*, если оно производилось посредствомъ черченія эллипсовъ, параболъ, гиперболъ или другихъ высшихъ кривыхъ. Съ помощью такихъ кривыхъ греки сами рѣшили всѣ три задачи; но такія рѣшенія встрѣчали возраженія, какъ рѣшенія *механическія*, посредствомъ которыхъ „благо геометріи устраняется и разрушается, ибо мы снова низводимъ ее къ чувственному міру, вмѣсто того, чтобы поднимать ее и насыщать невещественными мысленными образами такъ точно, какъ дѣлаетъ это Богъ, по каковой причинѣ Онъ и остается всегда Богомъ“ (Платонъ). Почему же греки до-

пускали въ геометрическихъ построеніяхъ кругъ и отвергали эллипсъ, параболу и гиперболу — кривыя того же порядка, что и кругъ? Мы отвѣтимъ словами Исаака Ньютона [1]): „Не простота уравненія, а легкость описанія линій должна руководить нами при выборѣ ихъ для построенія задачъ. Уравненіе параболы проще уравненія круга, и однако кругу, какъ кривой, которая строится проще, должно быть отдано предпочтеніе“ [2]).

Дѣленіе угла пополамъ принадлежитъ къ числу наиболѣе легкихъ геометрическихъ построеній. Ранніе изслѣдователи, какъ и начинающіе учиться элементарной геометріи въ нашихъ школахъ, безъ сомнѣнія, ожидали, что такъ же легко будетъ раздѣлить уголъ на три части. Въ особомъ случаѣ, когда данный уголъ прямой, построеніе дѣйствительно находится легко, но общій случай представляетъ непреодолимыя трудности. Нѣкто Гиппій—по всей вѣроятности, *Гиппій изъ Элиды* (род. около 460 г. до Р. Х.)—былъ однимъ изъ первыхъ, занимавшихся рѣшеніемъ этой задачи. Потерпѣвъ неудачу въ своихъ стараніяхъ найти рѣшеніе, заключающее только круги и прямыя линіи, онъ открылъ трансцендентную кривую (т. е. такую, которая не можетъ быть представлена алгебраическимъ уравненіемъ), съ помощью которой можно было раздѣлить уголъ не

---

[1]) *Isaac Newton*, Arithmetica Universalis.

[2]) Въ одномъ изъ писемъ Де-Моргана съ сэру В. Р. Гамильтону встрѣчаются слѣдующія слова: „Но что отличаетъ отъ другихъ линій прямую и кругъ болѣе, чѣмъ что-либо другое, и отдѣляетъ ихъ въ дѣйствительности отъ другихъ для цѣлей элементарной геометріи? Подобіе этихъ линій самимъ себѣ. Каждый отрѣзокъ прямой совпадаетъ со всякимъ другимъ одинаково длиннымъ ея отрѣзкомъ, и каждая часть окружности со всякой другой равной ей частью той же окружности. Въ чемъ же тогда заключается ошибка Евклида? Въ томъ, что онъ не ввелъ третьей кривой, обладающей тѣмъ же свойствомъ — *винтовой линіи*. Прямая линія, кругъ, винтъ—представители поступательнаго движенія, вращенія и сочетанія этихъ двухъ движеній — должны были бы служить орудіями геометріи. Будь у насъ въ распоряженіи винтъ, мы никогда не слыхали бы о невозможности трисекціи угла, квадратуры круга и т. д.—*Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton,* 1889, vol. III, p. 343. Придется, однако, исключить винтовую линію, если примѣнить къ ней критерій Ньютона—легкость описанія.

только на три, но и на какое угодно число равныхъ частей. Такъ какъ тою же кривой пользовались впослѣдствіи для квадратуры круга, то она получила названіе *квадратрисы* [1]).

Задача „объ удвоеніи куба“ пришла въ голову геометрамъ, какъ распространеніе на пространство трехъ измѣреній планиметрической задачи объ удвоеніи квадрата. Если на діагонали квадрата построить новый квадратъ, то площадь этого новаго квадрата будетъ вдвое больше площади перваго квадрата. Это очевидное слѣдствіе Пиѳагоровой теоремы. Но оказалось, что построеніе куба, вдвое большаго по объему, чѣмъ данный кубъ, приводитъ къ трудностямъ, которыхъ нельзя было предвидѣть. Эратосѳенъ приписываетъ этой задачѣ другое происхожденіе. Жители Делоса страдали однажды отъ мора, для избавленія отъ котораго оракулъ велѣлъ имъ удвоить алтарь, имѣвшій форму куба. Не вникнувъ въ смыслъ этого велѣнія, рабочіе просто построили кубъ, стороны котораго были вдвое длиннѣе прежнихъ; но такая необдуманная работа не умиротворила боговъ. Когда было открыто, въ чемъ состояла ошибка, то обратились за совѣтомъ къ Платону, прося его указать, какъ рѣшить эту „Делійскую задачу“. Эратосѳенъ передаетъ и другой разсказъ: древній трагическій поэтъ представляетъ царя Миноса, который хочетъ воздвигнуть гробницу своему сыну; будучи недоволенъ размѣрами гробницы, предложенными архитекторомъ, царь воскликнулъ: „Удвой ее, но сохрани форму куба!“ Такимъ образомъ, если только вѣрить этимъ разсказамъ, происхожденіе этой задачи связано съ трудностями рѣшенія архитектурныхъ вопросовъ [2]). *Гиппократъ Хіосскій* (около 430 г. до Р. Х.) первый показалъ, что задача объ удвоеніи куба можетъ быть приведена къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ между данной линіей и другой, которая вдвое длиннѣе, т. е. къ нахо-

[1]) Объ описаніи *квадратрисы* см. *Gow*, p. 164. Ганкель и Алльманъ отрицаютъ, что изобрѣтателемъ квадратрисы былъ Гиппій изъ Элиды; см. *Hankel*, p. 151, *Allman*, p. 94; утверждаютъ это *Cantor*, I, p. 181; *Bretschneider*, p. 94; *Gow*, p. 163; *Loria*, I, p. 66; *Tannery*, pp. 108, 131.

[2]) *Gow*, p. 162.

жденію такихъ двухъ линій, которыя, будучи вставлены между двумя данными, составили бы вмѣстѣ съ ними геометрическую прогрессію. Пользуясь современными обозначеніями, предположимъ, что a и $2a$ суть данныя линіи, x и y среднія пропорціональныя; $a, x, y, 2a$ составляютъ прогрессію, т. е. $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$; слѣдовательно, $x^2=ay$, $y^2=2ax$, откуда $x^4=a^2y^2=2a^3x$, $x^3=2a^3$. Но Гиппократу, конечно, не удалось отыскать x, сторону удвоеннаго куба, съ помощью *геометрическаго* построенія. Тѣмъ не менѣе, приведеніе стереометрической задачи къ задачѣ геометріи на плоскости было само по себѣ немаловажной заслугой. Гиппократъ прославился также рѣшеніемъ задачи о квадратурѣ луночки. Онъ сдѣлалъ попытку примѣнить это рѣшеніе къ квадратурѣ круга [1]). Своими изслѣдованіями Делійской задачи и задачи о квадратурѣ Гиппократъ много содѣйствовалъ развитію геометріи круга. Подобныя фигуры, изученіе которыхъ предполагаетъ знаніе теоріи пропорцій, также привлекли его вниманіе. Онъ написалъ руководство по геометріи, названное *Началами* (теперь утерянное), которое, безъ сомнѣнія, очень сильно содѣйствовало прогрессу геометріи, сдѣлавъ ее болѣе доступной желающимъ ее изучить.

Гиппократъ, говорятъ, однажды потерялъ все свое состояніе. По нѣкоторымъ разсказамъ онъ попалъ въ руки морскихъ разбойниковъ, другіе приписываютъ эту потерю его собственной винѣ, недостатку смѣтливости. Такъ, Аристотель говоритъ: „Хорошо извѣстно, что люди, глупые въ одномъ отношеніи, отнюдь не глупы въ другихъ. Въ этомъ нѣтъ ничего страннаго: такъ, Гиппократъ, хотя и искусный въ геометріи, былъ, повидимому, въ другихъ отношеніяхъ слабымъ и безтолковымъ человѣкомъ; и онъ, какъ говорятъ, по своей простотѣ потерялъ большую сумму денегъ, благодаря обману сборщиковъ пошлинъ въ Византіи“ [2]).

Значительнымъ шагомъ впередъ было введеніе *способа истощенія*, которому мы обязаны *Антифону*, современнику

---

[1]) Подробности см. у *Gow*, pp. 165, 168.

[2]) Переведено *Алльманомъ*, p. 57, изъ *Arist. Eth. ad Eud.*, VII, c. XIV, p. 1247 *a*, 15, ed. Bekker.

Гиппократа. Вписывая въ кругъ квадратъ и строя на сторонахъ его равнобедренные треугольники; строя далѣе на сторонахъ этихъ треугольниковъ новые равнобедренные треугольники такого же рода и т. д., онъ получаетъ послѣдовательность правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ о 8, 16, 32, ... сторонахъ, изъ которыхъ каждый ближе подходитъ къ площади круга, чѣмъ предыдущій, пока, наконецъ, кругъ не *истощается* окончательно. Антифонъ пришелъ къ тому заключенію, что можно вписать такимъ образомъ многоугольникъ, стороны котораго, вслѣдствіе ихъ малости, совпали бы съ окружностью круга. Такъ какъ можно найти квадраты, точно равновеликіе каждому данному многоугольнику, то можно построить квадратъ, точно равновеликій послѣднему вписанному многоугольнику, и, слѣдовательно, равновеликій и самому кругу. Отсюда слѣдуетъ, повидимому, что Антифонъ считалъ, что онъ установилъ возможность точной квадратуры круга. Одинъ изъ его современниковъ, *Бризонъ Гераклейскій,* видоизмѣнилъ этотъ способъ истощенія, не только вписывая, но и описывая въ тоже время правильные многоугольники. Онъ не брался за то, чтобы достигнуть совпаденія между многоугольниками и кругомъ, но сдѣлалъ, однако, грубую ошибку, допустивъ, что площадь круга составляетъ точную среднюю ариѳметическую между двумя многоугольными площадями.

Попытка Антифона найти квадратуру круга коснулась вопроса, который служилъ предметомъ горячихъ споровъ между философами того времени. Всѣ другіе греческіе геометры, насколько мы знаемъ, отрицали возможность совпаденія многоугольника и круга, такъ какъ прямая линія никогда не можетъ совпасть съ окружностью круга или частью ея. Если бы многоугольникъ могъ совпасть съ кругомъ, то, какъ говоритъ Симплицій, намъ пришлось бы отказаться отъ того представленія, по которому величины дѣлимы до безконечности. Мы встрѣчаемся здѣсь съ труднымъ философскимъ вопросомъ, обсужденіе котораго въ Аѳинахъ, повидимому, сильно повліяло на направленіе греческой математической мысли, заставивъ математиковъ измѣнить свои

взгляды на методы доказательства и изслѣдованія. Философская школа елеатовъ съ великимъ діалектикомъ Зенономъ во главѣ приводила поразительно остроумные доводы противъ безконечной дѣлимости линіи или другой величины. Антифонъ въ сущности усвоилъ положеніе Зенона, допустивъ, что прямыя и кривыя линіи, въ концѣ концовъ, приводятся къ однимъ и тѣмъ же недѣлимымъ элементамъ [1]). Въ своихъ разсужденіяхъ противъ теоріи безконечной дѣлимости линіи Зенонъ прибѣгалъ къ доказательству *per reductionem ad absurdum*. Если допустить справедливость этой теоріи, говорилъ онъ, то придется утверждать, что Ахиллъ не смогъ бы поймать черепахи: пока Ахиллъ добѣгалъ бы до мѣста, гдѣ была черепаха тогда, когда онъ началъ бѣжать, она проползала бы еще на нѣкоторое разстояніе впередъ; пока онъ добѣгалъ бы до этого новаго мѣста, она успѣвала бы снова пройти нѣкоторое разстояніе, и такъ далѣе. Будучи принужденъ такимъ образомъ пройти черезъ всѣ безконечно многочисленныя мѣста, которыя предварительно занимала черепаха, Ахиллъ не могъ бы никогда догнать черепахи. Но въ дѣйствительности Ахиллъ могъ догнать черепаху; поэтому нельзя считать, что разстояніе можетъ быть раздѣлено на неопредѣленно большое число частей. Подобнымъ же образомъ „летящая стрѣла находится постоянно въ покоѣ, потому что въ каждый моментъ она находится только въ одномъ мѣстѣ". Эти парадоксы, касающіеся безконечной дѣлимости, а слѣдовательно, и безконечной многочисленности частей, несомнѣнно сильно смущали математиковъ того времени. Желая сдѣлать зданіе геометріи неприступнымъ, они изгнали изъ своей науки понятія о безконечно-маломъ и безконечно-большомъ. Сверхъ того, чтобы предупредить возможность возраженій со стороны діалектиковъ, теоремы, очевидныя для чувственнаго воспріятія (какъ напримѣръ, что два пересѣкающіеся круга не могутъ имѣть общаго центра) были подвергнуты строгому доказательству. Такимъ образомъ, вліяніе такихъ діалектиковъ, какъ Зенонъ, которые сами не были математиками, сильно измѣ-

---

[1]) *Allman,* p. 56.

нило ходъ математической науки, направляя ее къ большей строгости [1]).

Способъ истощенія, принятый Антифономъ и Бризономъ, развился въ совершенно строгій *методъ истощенія.* Напримѣръ, для нахожденія отношенія между площадями двухъ круговъ вписывали подобные многоугольники и, увеличивая число сторонъ, почти истощали пространства, заключенныя между многоугольниками и кругами. Такъ какъ многоугольныя площади относились между собою, какъ квадраты діаметровъ, то геометры, безъ сомнѣнія, догадались о справедливости теоремы, приписываемой Гиппократу Хіосскому и состоящей въ томъ, что и сами круги относятся между собою, какъ квадраты ихъ діаметровъ. Но для того, чтобы исключить всякія туманныя представленія и возможность сомнѣнія, позднѣйшіе греческіе геометры прилагали къ этому случаю разсужденія, подобныя тѣмъ, которыя мы находимъ у Евклида, XII, 2, и которыя мы приводимъ здѣсь въ слѣдующемъ сжатомъ видѣ. Пусть C и c площади двухъ круговъ; D и d—діаметры. Тогда, если пропорція $D^2 : d^2 = C : c$ не вѣрна, пусть $D^2 : d^2 = C : c'$. Если $c' < c$, то можно вписать въ кругъ c многоугольникъ p, подходящій къ кругу ближе, чѣмъ c'. Если P соотвѣтствующій многоугольникъ, вписанный въ C, то $P : p = D^2 : d^2 = C : c'$, и, значитъ, $P : C = p : c'$. Такъ какъ $p > c'$, то отсюда слѣдуетъ, что $P > C$, а это нелѣпо. Подобнымъ же образомъ докажемъ, что c' не можетъ превосходить c. Такъ какъ c' не можетъ быть ни больше, ни меньше c, то c' должно быть равно c. Q.E.D. Мы привели здѣсь примѣръ доказательства по *методу истощенія,* который включаетъ въ себѣ способъ разсужденія, извѣстный подъ названіемъ *reductio ad absurdum.* Ганкель относитъ способъ истощенія ко времени Гиппократа Хіосскаго, но основанія, по которымъ онъ приписываетъ его этому раннему писателю, а не Евдоксу, кажутся недостаточными [2]).

---

[1]) См. далѣе *Hankel,* p. 118; *Cantor,* I, p. 185; *Allman,* p. 55; *Loria,* I, p. 53.

[2]) См. *Hankel,* p. 122; *Gow,* p. 173; *Cantor,* I., pp. 229, 234.

IV. *Школа Платона.*—Послѣ Пелопонесской войны (431—404 до Р. Х.) политическое могущество Аѳинъ уменьшилось, но тѣмъ сильнѣе сдѣлалось ихъ руководительство въ философіи, литературѣ и наукѣ. Аѳины произвели такихъ людей, какъ *Платонъ* (429?—347 до Р. Х.), сила ума котораго оказывала вліяніе на философскую мысль всѣхъ временъ. Сократъ, его первый учитель, презиралъ математику. Но послѣ смерти Сократа Платонъ много путешествовалъ и познакомился съ нѣсколькими выдающимися математиками. Въ Киренѣ онъ изучалъ геометрію съ Ѳеодоромъ; въ Италіи встрѣтилъ онъ пиѳагорейцевъ. Архитъ изъ Тарента и Тимей изъ Локръ сдѣлались его близкими друзьями. Около 389 г. до Р. Х. Платонъ возвратился въ Аѳины, основалъ школу въ рощахъ *Академіи* и посвятилъ остальные годы своей жизни преподаванію и писательству. Не слѣдуя въ этомъ отношеніи своему учителю Сократу, Платонъ придавалъ большое значеніе вліянію математики на развитіе ума. „Пусть никто, не знакомый съ геометріей, не входитъ сюда"—было написано надъ входомъ въ его школу. Подобнымъ же образомъ Ксенократъ, одинъ изъ преемниковъ Платона по учительству въ Академіи, отказался принять ученика, не получившаго математическаго образованія: „ступай", сказалъ онъ ему, „не одолѣть тебѣ философіи" *). *Евдемовъ Обзоръ* говоритъ о Платонѣ, что „онъ наполнилъ свои писанія математическими выраженіями и примѣрами и при каждомъ удобномъ случаѣ показывалъ удивительную связь, которая существуетъ между математикой и философіей".

Платонъ не былъ математикомъ по профессіи. Онъ сдѣлалъ мало или вовсе не сдѣлалъ оригинальныхъ открытій, но онъ поощрялъ изученіе математики, указывалъ на возможныя усовершенствованія въ логикѣ и методахъ, употребляемыхъ въ геометріи. Онъ превратилъ инстинктивную логику прежнихъ геометровъ въ методу, которою можно было пользоваться сознательно и съ полнымъ довѣріемъ [1].

---

*) *Πορεύου, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις τῆς φιλοσοφίας. Diog. Laert.*, IV, 10.
Прим. ред.

[1]) *Gow,* pp. 175, 176. См. также *Hankel,* pp. 127—150.

Онъ ввелъ обычай давать тщательныя опредѣленія и разсматривать постулаты и аксіомы. Пиѳагорейское опредѣленіе „точка есть единица въ положеніи", воплощающее философскую теорію, было отвергнуто платониками; точка опредѣлялась, какъ „начало прямой линіи" или „недѣлимая линія". Согласно Аристотелю, были еще въ ходу слѣдующія опредѣленія: точка, линія, поверхность суть соотвѣтственно границы линіи, поверхности, тѣла; тѣло есть то, что имѣетъ три измѣренія. Аристотель цитируетъ слѣдующую аксіому платониковъ: если отъ равныхъ отнять поровну, то остатки будутъ равные. Какія именно опредѣленія и аксіомы принадлежали именно Платону, этого мы сказать не можемъ. Проклъ и Діогенъ Лаэртійскій говорятъ, что Платонъ былъ изобрѣтателемъ метода доказательства, называемаго *анализомъ*. Безъ сомнѣнія, методомъ этимъ пользовался безсознательно Гиппократъ и другіе, но обыкновенно полагаютъ, что именно Платонъ превратилъ безсознательный логическій пріемъ въ сознательный, законный методъ. Развитіе и усовершенствованіе этого метода было конечно большой заслугой; Алльманъ (стр. 125) склоненъ, однако, приписывать это скорѣе Архиту, чѣмъ Платону.

Термины *синтезъ* и *анализъ* имѣли въ греческой математикѣ значеніе, отличное отъ того, которое они имѣютъ въ современной математикѣ или въ логикѣ [1]). Въ самомъ древнемъ опредѣленіи анализъ противополагается синтезу; опредѣленіе это дано у Евклида, XIII, 5, и было, весьма вѣроятно, формулировано Евдоксомъ: [2]) „Анализъ есть утвержденіе искомаго, какъ принятаго за вѣрное, откуда восходимъ посредствомъ послѣдовательныхъ заключеній до безспорной истины; синтезъ есть утвержденіе безспорнаго положенія, отъ котораго переходимъ посредствомъ послѣдовательныхъ заключеній къ доказательству истины" [3]).

---

[1]) *Hankel,* pp. 137—150; также *Hankel,* Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Tübingen, 1884, p. 12.

[2]) *Bretschneider,* p. 168.

[3]) Въ греческой математикѣ мы находимъ различные виды анализа. Одинъ изъ нихъ есть *reductio ad absurdum* въ *методѣ истощенія.* Предположимъ, что мы хотимъ доказать, что „*A* есть *B*". Мы допускаемъ, что *A* есть *не B;* затѣмъ мы образуемъ синтетическій

Платонъ сильно побуждалъ къ изученію стереометріи. Шаръ и правильныя тѣла изучались въ нѣкоторой степени еще пиѳагорейцами и египтянами; послѣдніе были, конечно, болѣе или менѣе хорошо знакомы съ геометріей пирамиды. Въ Платоновой школѣ были изслѣдованы призма, пирамида, цилиндръ и конусъ. Изученіе конуса привело Менехма къ открытію коническихъ сѣченій. Быть можетъ, однимъ изъ наиболѣе блестящихъ математиковъ этого періода былъ *Евдоксъ*. Онъ родился въ Книдѣ около 408 г. до Р. Х., учился у Архита и въ продолженіе двухъ мѣсяцевъ у Платона. Позднѣе онъ училъ въ Кизикѣ. Однажды посѣтилъ онъ, вмѣстѣ со своими учениками, Платонову школу. Онъ умеръ въ Кизикѣ въ 355 г. до Р. Х. Среди учениковъ Евдокса въ Кизикѣ, поступившихъ потомъ въ академію Платона, были Менехмъ, Диностратъ, Аѳеней и Геликонъ. Академія въ большой мѣрѣ обязана имъ своей славой. *Евдемовъ Обзоръ* говоритъ, что Евдоксъ „первый увеличилъ число общихъ теоремъ, прибавилъ къ тремъ пропорціямъ еще три и значительно расширилъ начатое еще Платономъ изученіе теоріи сѣченія, къ которой онъ

рядъ послѣдовательныхъ заключеній: *не B* есть *C*, *C* есть *D*, *D* есть *E*; если *A* есть *не E*, то невозможно, чтобы *A* было *не B*; т. е. *A* есть *B*; Q.E.D. Можно прослѣдить этотъ процессъ на доказательствѣ 2 предл. XII кн. Евклида, приведенномъ выше. Близкимъ къ этому виду анализа является *теоретическій* анализъ: чтобы *доказать*, что *A* есть *B*, *примемъ*, что *A* есть *B*, тогда *B* есть *C*, *C* есть *D*, *D* есть *E*, *E* есть *F*; значитъ, *A* есть *F*. Если извѣстно, что это послѣднее утвержденіе ложно, то *A* есть *не B*; если извѣстно, что оно истинно, то разсужденіе наше еще не доказываетъ справедливости теоремы. Чтобы устранить всякія сомнѣнія, мы должны слѣдовать обратному пути въ нашемъ разсужденіи: *A* есть *F*, *F* есть *E*, *E* есть *D*, *D* есть *C*, *C* есть *B*; слѣд., *A* есть *B*. Этотъ второй случай заключаетъ въ себѣ два процесса—аналитическій и слѣдующій за нимъ синтетическій. Единственная цѣль аналитическаго процесса—открыть процессъ синтетическій. Большее значеніе имѣлъ для грековъ *проблематическій* анализъ, прилагавшійся къ построеніямъ, долженствовавшимъ удовлетворять даннымъ условіямъ. *Допускаютъ*, что построеніе уже выполнено; затѣмъ изучаютъ геометрическія соотношенія съ цѣлью открыть синтетическое рѣшеніе задачи. Примѣры доказательствъ посредствомъ анализа см. у *Ганкеля*, p. 143; *Gow*, p. 178; *Allman*, pp. 160—163; *Todhunter's* Euclid, 1869, Appendix, pp. 320—328.

приложилъ аналитическій методъ". Подъ этимъ „сѣченіемъ" разумѣется, безъ сомнѣнія, „золотое сѣченіе", которое разсѣкаетъ линію въ среднемъ и крайнемъ отношеніи. Онъ доказалъ, говоритъ Архимедъ, что пирамида составляетъ точно одну треть призмы, а конусъ одну треть цилиндра, при равномъ основаніи и равной высотѣ. Имъ же было, вѣроятно, установлено, что шары относятся другъ къ другу, какъ кубы ихъ радіусовъ. *Методъ истощенія,* которымъ онъ пользовался въ широкой мѣрѣ, вѣроятно, былъ изобрѣтенъ имъ же самимъ [1]).

V. *Первая Александрійская школа.* Въ теченіе шестидесяти шести лѣтъ, слѣдовавшихъ за Пелопонесской войной —періода политическаго упадка, Аѳины произвели нѣкоторыхъ изъ величайшихъ и наиболѣе тонкихъ мыслителей греческой древности. Въ 338 г. до Р. Х. Аѳины были покорены Филиппомъ Македонскимъ, и могущество ихъ было разбито навсегда. Скоро послѣ того Александромъ Великимъ была основана Александрія, и въ этомъ городѣ литература, философія, наука и искусство нашли новое отечество.

Въ теченіе нашего разсказа мы видѣли, какъ геометрія пустила слабые корни въ Египтѣ; какъ она была пересажена на Іонійскіе острова; оттуда въ Нижнюю Италію и въ Аѳины; теперь, наконецъ, мы видимъ, какъ она, достигнувъ значительнаго роста и стройности, переносится въ родную страну и, пріобрѣтя тамъ новыя силы, широко и роскошно разрастается.

Быть можетъ, основателемъ—во всякомъ случаѣ, центральной фигурой—Александрійской математической школы былъ *Евклидъ* (около 300 г. до Р. Х.). Ни одинъ древній писа-

---

[1]) *Евдемовъ Обзоръ* упоминаетъ, кромѣ названныхъ уже геометровъ, Ѳеетета изъ Аѳинъ, которому, какъ полагаютъ, Евклидъ обязанъ основаніями того, что изложено имъ въ 10-ой книгѣ, гдѣ говорится о несоизмѣримыхъ величинахъ (*Allman*, pp. 206—215); Леодама изъ Ѳазоса; Неоклида и ученика его Льва, который написалъ геометрію; Ѳевдія Магнезійскаго, который также написалъ геометрію или *Начала;* Гермотима Колофонскаго, который открылъ многія предложенія, находящіяся въ Евклидовыхъ *Началахъ;* Амикла изъ Гераклеи, Кизикена Аѳинскаго, Филиппа Мендскаго. Только что упомянутыя до-Евклидовы руководства до насъ не дошли.

тель ни въ какой отрасли знанія не занималъ такого господствующаго положенія въ современной системѣ образованія, какъ Евклидъ въ элементарной геометріи. „Ни одинъ греческій писатель, если не считать священнаго писанія, не находилъ столькихъ читателей и столько различныхъ переводчиковъ, какъ Евклидъ“ [1]).

Упомянувъ о Евдоксѣ, Ѳеететѣ и другихъ членахъ Платоновой школы, Проклъ [2]) прибавляетъ къ *Евдемову Обзору* слѣдующее:

„Немногимъ позже ихъ жилъ Евклидъ, который написалъ *Начала,* привелъ въ порядокъ многое изъ того, что сдѣлалъ Евдоксъ, дополнилъ многое изъ того, что сдѣлано было Ѳеететомъ, и привелъ неопровержимыя доказательства предложеній, которыя были доказаны менѣе строго его предшественниками. Евклидъ жилъ во время царствованія перваго Птолемея, ибо о немъ упоминаетъ Архимедъ въ первой своей книгѣ; и говорятъ, сверхъ того, что Птолемей однажды спросилъ его, нѣтъ ли болѣе короткаго пути къ познанію геометрическихъ истинъ, чѣмъ тотъ, по которому нужно пройти черезъ *Начала,* на что онъ отвѣчалъ, что нѣтъ къ геометріи царскаго пути [3]). Онъ поэтому моложе учениковъ Платона, но старше Эратосѳена и Архимеда, ибо они современники, какъ сообщаетъ намъ объ этомъ Эратосѳенъ. Онъ принадлежалъ къ сектѣ платониковъ и былъ хорошо знакомъ съ Платоновой философіей, настолько, что даже конечной цѣлью своего сочиненія о *Началахъ* поставилъ построеніе такъ называемыхъ Платоническихъ фигуръ (правильныхъ тѣлъ)“ [4]).

---

[1]) *De Morgan,* „Euclides“ въ Smith's Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology. Мы рекомендуемъ всѣмъ эту замѣчательную статью.

[2]) *Proclus (Ed. Friedlein),* p. 68.

[3]) „Эта острота нашла многихъ подражателей. «Quel diable», сказалъ одинъ французскій дворянинъ, обращаясь къ Rohault, своему учителю геометріи, «pourrait entendre cela?» и получилъ на это такой отвѣтъ: «Ce serait un diable qui aurait de la patience». Исторію, подобную Евклидовой, Сенека (письмо 91, цит. Августомъ) разсказываетъ объ Александрѣ“. *De Morgan,* цит. соч.

[4]) Это утвержденіе, относящееся къ цѣли Евклидова сочиненія, очевидно, невѣрно.

Занимательны замѣчанія Паппа [1]), который говоритъ, что Евклидъ былъ мягокъ и любезенъ со всѣми, кто могъ хотя въ малѣйшей степени способствовать развитію математической науки. Стобей [2]) передаетъ слѣдующій разсказъ: Юноша, который началъ заниматься геометріей съ Евклидомъ, выучивъ первое предложеніе, спросилъ: „Что я пріобрѣту, изучая эти вещи?“ Въ отвѣтъ на это Евклидъ позвалъ своего раба и сказалъ: „Дай ему три обола, — онъ хочетъ, чтобы ученіе приносило ему прибыль.“

Намъ извѣстно о жизни Евклида очень мало сверхъ того, что даютъ эти отрывки. Всѣ другія свѣдѣнія о немъ тривіальны, достовѣрность ихъ сомнительна, иногда даже они явно ложны [3]).

Хотя Евклидъ является авторомъ нѣсколькихъ трудовъ, относящихся къ математикѣ и физикѣ, слава его во всѣ времена опиралась на его сочиненіе по геометріи—такъ называемыя *Начала*. Эта книга настолько превосходила *Начала,* написанныя Гиппократомъ, Львомъ и Ѳевдіемъ, что сочиненія эти скоро погибли въ борьбѣ за существованіе. Мы разберемъ впослѣдствіи болѣе полно ту великую роль, которую Евклидовы *Начала* играли въ преподаваніи геометріи въ теченіе всѣхъ послѣдующихъ вѣковъ, а также сильныя и слабыя стороны этой книги, какъ онѣ обнаружи-

---

1) *Pappus (Ed. Hultsch),* pp. 676–678.

2) Цит. у *Gow,* p. 195 изъ *Floril.* IV, p. 250.

3) Сирійскіе и арабскіе писатели имѣютъ притязаніе на болѣе подробныя свѣдѣнія о жизни Евклида; они говорятъ, что отца его звали Навкратомъ, что Евклидъ былъ грекъ, но родился въ Тирѣ, что онъ жилъ въ Дамаскѣ и издалъ *Начала* Аполлонія. Извлеченія изъ арабскихъ писателей и списокъ книгъ, относящихся къ главнымъ изданіямъ Евклида, см. у *Loria,* II, pp. 10, 11, 17, 18. Въ средніе вѣка геометра Евклида смѣшивали съ Евклидомъ изъ Мегары, ученикомъ Сократа. Нѣкоторый интересъ представляетъ слѣдующее мѣсто изъ цит. соч. *Де Моргана*: „На заглавномъ листѣ Вистонова перевода Евклида въ изложеніи Tacquet изображенъ бюстъ Евклида; объ этомъ бюстѣ сказано тамъ, что онъ взятъ съ мѣдной монеты, принадлежавшей Христинѣ Шведской; но такой монеты нѣтъ въ обнародованной коллекціи монетъ изъ кабинета шведской королевы. Сидоній Аполлинарій (Epist. XI, 9) говоритъ, что существовалъ обычай писать Евклида съ растопыренными (laxatis) пальцами, какъ бы производящимъ измѣреніе.“

ваются при свѣтѣ педагогической науки и современныхъ геометрическихъ открытій. Въ настоящее время мы ограничимся краткимъ критическимъ обзоромъ содержанія *Началъ*. Мы не имѣемъ средствъ узнать, что именно въ Началахъ Евклида является оригинальнымъ. Мы можемъ, однако, съ увѣренностью утверждать, что первые издатели *Началъ* были неправы, полагая, что законченная и неопровержимая система геометріи возникла сразу въ умѣ Евклида „подобно вооруженной Минервѣ, вышедшей изъ головы Юпитера". Историческія изслѣдованія показали, что Евклидъ заимствовалъ большую часть матеріала для своей геометріи у выдающихся математиковъ, бывшихъ его предшественниками. Въ дѣйствительности, только доказательство „теоремы Пиѳагора" прямо приписывается Евклиду. Алльманъ [1]) предполагаетъ, что сущность книгъ I, II, IV была извѣстна пиѳагорейцамъ, что книгой VI въ той же мѣрѣ обязаны мы пиѳагорейцамъ и Евдоксу, который усовершенствовалъ ученіе о пропорціяхъ въ приложеніи къ несоизмѣримымъ величинамъ, а также методъ истощенія (книга XII), что Ѳеететъ доставилъ много матеріала для X и XIII книгъ и что наибольшая часть оригинальныхъ изслѣдованій Евклида находится въ X книгѣ. Наибольшей заслугой Евклида явилось, безъ сомнѣнія, приведеніе въ стройный порядокъ дошедшаго до него матеріала. Ему по заслугамъ принадлежитъ одно изъ первыхъ мѣстъ въ ряду величайшихъ математиковъ всѣхъ временъ.

Содержаніе *Началъ* можно передать вкратцѣ такъ: въ книгахъ I, II, III, IV, VI излагается плоская геометрія; въ книгѣ V—теорія пропорцій въ приложеніи къ величинамъ вообще; въ книгахъ VII, VIII, IX—ариѳметика; въ X—говорится объ ариѳметическомъ характерѣ дѣленій прямыхъ линій (т. е. объ ирраціональныхъ количествахъ); въ книгахъ XI, XII—о геометріи тѣлъ; въ книгахъ XIII, XIV, XV—о правильныхъ тѣлахъ. Послѣднія двѣ книги подложны и написаны, какъ полагаютъ, первая—Гипсикломъ, вторая—Дамасціемъ [2]).

---

[1]) *Allman*, pp. 211, 212.

[2]) См. *Gow*, p. 272; *Cantor*, I, pp. 342, 467. Книга XV, по мнѣнію Гейберга и другихъ, состоитъ изъ трехъ частей, изъ коихъ третья, быть можетъ, принадлежитъ Дамасцію. См. *Loria*, II, pp. 88–92.

До сихъ поръ существуютъ различныя мнѣнія о достоинствахъ *Началъ,* какъ научнаго трактата. Нѣкоторые разсматриваютъ ихъ, какъ трудъ, логика котораго во всѣхъ подробностяхъ совершенна, выше всякихъ нападокъ, тогда какъ другіе полагаютъ, что сочиненіе это наполнено ложными выводами [1]). По нашему мнѣнію, неправы ни тѣ ни другіе. Что текстъ *Началъ* несвободенъ отъ ошибокъ, очевидно для всякаго, кто читалъ комментаторовъ Евклида. Можетъ быть, никто никогда не восхищался великимъ Александрійцемъ больше, чѣмъ Робертъ Симсонъ. Между тѣмъ „примѣчанія" Симсона указываютъ на многочисленные недостатки у Евклида. Хотя Симсонъ, конечно, и неправъ, приписывая *всѣ* замѣченные имъ въ *Началахъ* недостатки безтолковымъ издателямъ, тѣмъ не менѣе первые издатели, безъ сомнѣнія, отвѣтственны за многіе изъ этихъ недостатковъ. Большая часть исправленій относится къ маловажнымъ пунктамъ. Все сочиненіе въ общемъ представляетъ собою высокій образецъ точности. Подробно изслѣдуя текстъ, комментаторы обнаружили въ нѣкоторыхъ мѣстахъ недостатокъ крайней точности въ упоминаніи того, что принимается безъ доказательства; какъ очевидныя сами по себѣ, разсматриваются истины, не упомянутыя среди другихъ постулатовъ [2]). Съ другой стороны, Евклидъ иногда считаетъ постулатомъ то, что могло бы быть доказано; такъ, напримѣръ, онъ въ самыхъ опредѣленіяхъ утверждаетъ, что діаметръ круга дѣлитъ эту фигуру пополамъ [3]), что могло бы быть легко доказано на основаніи аксіомъ. Онъ опредѣляетъ плоскій уголъ, какъ „взаимное наклоненіе двухъ линій, на плоскости встрѣчающихся и не впрямь лежащихъ" [*]), но оставляетъ понятіе о величинѣ угла нѣсколько

---

[1]) См. *C. S. Peirce* въ Nation, Vol. 54, 1892, pp. 116, 366, и въ Monist, July, 1892, p. 539; *G. B. Halsted,* Educational Review, 8, 1894, pp. 91—93.

[2]) Напримѣръ, пересѣченіе круговъ въ I, 1 и въ I, 22. См. также *H. M. Taylor's* Euclid, 1893, p. VII.

[3]) *De Morgan,* статья „Евклидъ Александрійскій" въ English Cyclopaedia.

[*]) „Евклидовыхъ началъ восемь книгъ и т. д.", перев. *Ѳ. Петрушевскаго,* Спб., 1819, стр. 2 (кн. 1, опр. 8). *Прим. ред.*

неопредѣленнымъ, не заботясь о томъ, чтобы указать на средство удостовѣриться въ равенствѣ двухъ угловъ, и не опредѣляя того, что называется суммою или разностью двухъ угловъ [1]). Иногда Евклидъ не разсматриваетъ всѣхъ особыхъ случаевъ, необходимыхъ для полнаго и окончательнаго доказательства теоремы и даже не упоминаетъ объ этихъ случаяхъ [2]). Эти примѣры недостатковъ, которые доброжелательные критики нашли въ *Началахъ,* показываютъ, что Евклидъ не непогрѣшимъ[3]). Но замѣчая эти ошибки, мы не должны упускать изъ виду общее превосходство Евклидова труда, какъ научнаго трактата—превосходство, которое въ 1877 г. получило соотвѣтствующее признаніе со стороны коммиссіи Британской Ассоціаціи для содѣйствія успѣхамъ науки (куда вошли нѣкоторые изъ наиболѣе выдающихся англійскихъ математиковъ); въ докладѣ коммиссіи сказано, что „ни одно изъ появившихся до сихъ поръ руководствъ не можетъ замѣнить Евклида въ отношеніи авторитетности" [4]). Какъ мы уже замѣтили, нѣкото-

[1]) См. *Simon Newcomb,* Elements of Geometry, 1884, Preface; *H. M. Taylor's* Euclid, p. 8; *De Morgan,* The Connexion of Number and Magnitude, London, 1836, p. 85.

[2]) Ср. *Todhunter's* Euclid, примѣч. къ I, 35; III, 21; XI, 21. *Simson's* Euclid. примѣч. къ I, 7; III, 35.

[3]) Многочисленнымъ нападкамъ подвергалось доказательство теор. 16 кн. I, которое „пользуется только такими посылками, которыя одинаково справедливы какъ въ случаѣ плоскихъ, такъ и въ случаѣ сферическихъ треугольниковъ; и однако, заключеніе, выведенное изъ этихъ посылокъ, завѣдомо ложно для треугольниковъ сферическихъ". См. *Nation,* Vol. 54, pp. 116, 366; *E. T. Dixon,* въ Association for the Improvement of Geometrical Teaching (A. I. G. T.), 17th General Report, 1891, p. 29; *Engel und Stäckel.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, Leipzig, 1895, p. 11, примѣчаніе. (Мы будемъ впослѣдствіи цитировать эту книгу, какъ *Engel und Stäckel*). Въ журналѣ Monist, за Іюль 1894 г., стр. 485, G. B. Halsted защищаетъ доказательство I, 16, указывая на то, что сферическіе треугольники исключаются благодаря постулату: „Двѣ прямыя не могутъ заключать пространства". Если бы мы были увѣрены въ томъ, что Евклидъ пользовался этимъ постулатомъ, то нельзя было бы ничего возразить противъ доказательства I, 16, но, по всей вѣроятности, постулатъ этотъ былъ опущенъ Евклидомъ и внесенъ въ текстъ какимъ-нибудь комментаторомъ. См. *Heiberg,* Euclidis Elementa.

[4]) A. I. G. T., 6th General Report, 1878, p. 14.

рые издатели *Началъ,* въ особенности Робертъ Симсонъ, исходили изъ того предположенія, что оригиналъ Евклида былъ совершеннымъ, и всѣ недостатки извѣстнаго имъ текста приписывали его искаженіямъ. Напримѣръ, Симсонъ думаетъ, что въ началѣ пятой книги должно было бы быть опредѣленіе сложнаго отношенія; онъ вставляетъ поэтому такое опредѣленіе и увѣряетъ насъ, что таково именно и было опредѣленіе Евклида. Это предположеніе не находитъ, однако, подтвержденія ни въ одной рукописи. Тотъ текстъ *Началъ,* которымъ мы теперь пользуемся, принадлежитъ Ѳеону. Симсонъ готовъ былъ сдѣлать его козломъ отпущенія за всѣ тѣ недостатки, которые, по его мнѣнію, онъ открылъ у Евклида. Существуетъ, однако, списокъ *Началъ,* посланный вмѣстѣ съ другими рукописями изъ Ватикана въ Парижъ Наполеономъ I; какъ полагаютъ, списокъ этотъ относится ко времени до изданія Ѳеона; онъ отличается очень мало отъ Ѳеонова текста, что указываетъ на то, что ошибки, находящіяся въ этомъ текстѣ, принадлежатъ вѣроятно самому Евклиду.

Въ началѣ нашихъ современныхъ переводовъ *Началъ* (напримѣръ, въ переводахъ Роберта Симсона или Тоттёнтера) *), подъ заголовкомъ опредѣленій дано изложеніе такихъ понятій, какъ точка, линія и т. д., и нѣкоторыя словесныя объясненія. Затѣмъ слѣдуютъ три постулата или требованія, (1) чтобы можно было отъ всякой точки до другой провести прямую линію, (2) чтобы линію можно было продолжить неопредѣленно, (3) чтобы можно было изъ всякой точки, какъ центра, всякимъ радіусомъ описать кругъ. За этими постулатами идутъ двѣнадцать аксіомъ [1]).

---

*) На русскій языкъ Евклидовы Начала переведены *Ѳ. И. Петрушевскимъ* (Эвклидовыхъ началъ восемь книгъ, содержащія въ себѣ основанія геометріи. Спб., 1819; Эвклидовыхъ началъ три книги, содержащія общую теорію чиселъ древнихъ геометровъ. Спб., 1835 — книги I, VI, XI, XII; VII, VIII, IX); *М. Е. Ващенко-Захарченко* (Начала Эвклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями. 1878, 79, 80). *Прим. ред.*

[1]) Изъ этихъ двѣнадцати „аксіомъ“ пять, какъ полагаютъ, не даны самимъ Евклидомъ, а именно четыре аксіомы о неравенствахъ и аксіома о томъ, что „двѣ прямыя не заключаютъ пространства“. Такъ, *Heiberg* и *Menge* въ своемъ греко-латинскомъ изданіи 1883 г. опускаютъ всѣ эти пять аксіомъ. См. также *Engel und Stäckel,* p. 8, прим.

Словомъ *аксіома* пользуется Проклъ, но его нѣтъ у Евклида. Онъ говоритъ вмѣсто этого объ „общихъ понятіяхъ"— общихъ или всѣмъ людямъ, или всѣмъ наукамъ. Первыя девять аксіомъ относятся къ величинамъ всевозможныхъ родовъ (вещи, равныя одной и той же вещи, равны между собою и т. д., цѣлое больше своей части) [1]), тогда какъ послѣднія три (двѣ прямыя не могутъ заключать пространства; всѣ прямые углы равны между собой; аксіома параллельныхъ линій) относятся только къ пространству. Хотя во всѣхъ современныхъ изданіяхъ Евклида, кромѣ новѣйшихъ, геометрическія аксіомы отнесены къ той же категоріи, что и остальныя девять, Евклидъ, безъ сомнѣнія, рѣзко различалъ эти два класса аксіомъ. Число рукописей, въ которыхъ аксіомы, относящіяся къ пространству, находятся среди постулатовъ, значительно превосходитъ число другихъ [2]). Тамъ имъ и слѣдуетъ быть, такъ какъ новѣйшія изслѣдованія показали, что это *предположенія*, а не *общія понятія,* или аксіомы. Неизвѣстно, кто первый сдѣлалъ неудачную ихъ перестановку. Въ этомъ отношеніи нужно поскорѣе вернуться къ Евклидову обычаю. Постулатъ о па-

---

[1]) „Цѣлое больше своей части — не есть аксіома. Евклидъ же, который всегда отличается тѣмъ, что плохо разсуждаетъ, сдѣлалъ изъ этого предложенія аксіому.... Предложеніе это вѣрно для собраній конечнаго числа вещей и ложно для собраній безконечныхъ."— *C. S. Peirce* Monist, July 1892, p. 539. Peirce даетъ примѣры, въ которыхъ для безконечныхъ собраній предметовъ „аксіома" не вѣрна Тѣмъ не менѣе, мы не желаемъ допустить, что принятіе этой аксіомы доказываетъ, что Евклидъ всегда плохо разсуждаетъ. Евклидъ не имѣлъ рѣшительно никакого дѣла съ безконечными собраніями. Что же касается конечныхъ собраній, нѣтъ никакого другого предложенія относительно нихъ болѣе достойнаго быть принятымъ за аксіому. Къ безконечнымъ собраніямъ не прилагаются слова *большой* и *малый*. Объ этомъ см. у *Георга Кантора,* „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebraischer Zahlen", Crelle's Journal, 77, 1873; болѣе элементарное разсмотрѣніе этого вопроса см. въ соч. *Felix Klein,* Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von *F. Tägert,* Leipzig, 1895, p. 39 Мы будемъ впослѣдствіи цитировать это сочиненіе, какъ *Klein*]. Что аксіома „цѣлое больше своей части" неприложима къ сравненію безконечностей, замѣчено было еще Bolyai, см. *Halsted's Bolyai's* Science Absolute of Space, 4th Ed., 1896, § 24, p. 20.

[2]) *Hankel,* Die Complexen Zahlen, Leipzig, 1867, p. 52.

раллельныхъ линіяхъ играетъ очень важную роль въ исторіи геометріи [1]). Большая часть современныхъ писателей полагаетъ, что Евклидъ пропустилъ одинъ изъ постулатовъ, постулатъ твердости (или иначе—равнаго измѣненія), который требуетъ, чтобы можно было передвигать фигуры въ пространствѣ безъ всякаго измѣненія въ ихъ формѣ или величинѣ (или что всѣ движущіяся фигуры измѣняются равно, и каждая изъ нихъ наполняетъ прежнее пространство по возвращеніи въ первоначальное положеніе [2]). Постулатъ твердости дается въ новѣйшихъ руководствахъ по геометріи, но противорѣчащій ему постулатъ, приведенный выше (постулатъ равнаго измѣненія), тоже допускалъ бы сравненіе фигуръ по методу положенія, и „все бы шло такъ же хорошо" (Клиффордъ). Изъ этихъ двухъ постулатовъ первый проще, и, кромѣ того, находится въ соотвѣтствіи съ тѣмъ, что мы считаемъ обыденнымъ опытомъ. G. B. Halsted утверждаетъ, что Евклидъ *не* упустилъ изъ виду требованія твердости, но что онъ правъ, не упоминая этого требованія, такъ какъ оно покрывается 8 постулатомъ: „Величины, которыя могутъ быть совмѣщены, равны между собою".

Въ первой книгѣ *Началъ* Евклидъ только разъ воображаетъ, что фигуры передвигаются одна относительно дру-

[1]) Постулатъ о параллельныхъ линіяхъ состоитъ въ слѣдующемъ: если прямая линія встрѣчаетъ двѣ прямыхъ, образуя при этомъ два внутреннихъ одностороннихъ угла, которые въ суммѣ составляютъ меньше двухъ прямыхъ угловъ, то эти прямыя линіи, будучи продолжаемы непрерывно, встрѣтятся, наконецъ, по ту сторону, по которую расположены углы, составляющіе вмѣстѣ меньше двухъ прямыхъ угловъ". Въ различныхъ изданіяхъ Евклида „аксіомы" нумерованы различно. Такъ, постулатъ о параллельныхъ линіяхъ въ древнихъ рукописяхъ считается 5-мъ постулатомъ. Тоже мѣсто назначилъ ему *F. Peyrard* (который первый сравнилъ критически различныя рукописи) въ своемъ изданіи Евклида на французскомъ и латинскомъ языкахъ, 1814 г., и *Heiberg* и *Menge* въ ихъ превосходномъ изданіи сочиненій Евклида съ примѣчаніями, по гречески и по латыни, вышедшемъ въ Лейпцигѣ въ 1883 г. Клавій называетъ этотъ постулатъ 13-ой *аксіомой;* Робертъ Симсонъ - 12-ой *аксіомой;* другіе (напримѣръ Bolyai)—11-ой аксіомой.

[2]) Ср. *W. K. Clifford*, The Common Sense of the Exact Sciences, 1885, p. 54. „(1) Различныя вещи измѣнялись одинаково, и (2) все, что переносилось въ пространствѣ и приносилось обратно въ первоначальное положеніе, наполняло прежнее пространство".

гой, а именно — при доказательствѣ предложенія 4: два треугольника равны, если двѣ стороны одного и заключенный между ними уголъ равны соотвѣтственно двумъ сторонамъ другого и заключенному между ними углу. Чтобы привести треугольники къ совпаденію могло бы потребоваться перевернуть одинъ изъ треугольниковъ, но Евклидъ объ этомъ умалчиваетъ. „Неужели отъ его вниманія могло ускользнуть то обстоятельство, что въ плоской геометріи есть существенная разница между переноснымъ движеніемъ и переворачиваніемъ?" [1]).

Книга V—о пропорціяхъ величинъ—приводила многихъ въ восхищеніе строгостью своего изложенія [2]). Начинающіе находятъ ее трудною. Объ этой книгѣ больше всего разсуждали во всѣхъ спорахъ о пригодности *Началъ*, какъ руководства для начинающихъ.

Книга X (такъ же, какъ и VII, VIII, IX, XIII, XIV, XV) опускается въ современныхъ школьныхъ изданіяхъ. Но изъ всѣхъ книгъ Евклидовыхъ *Началъ* это самая удивительная. Евклидъ изслѣдуетъ всевозможные виды линій, которыя могутъ быть представлены формулой $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, гдѣ a и b представляютъ двѣ соизмѣримыя линіи; онъ насчитываетъ 25 видовъ. Всякая разновидность каждаго вида несоизмѣрима со всѣми отдѣльными линіями каждаго другаго вида. Восторженное удивленіе, съ которымъ де Морганъ говорилъ объ этой книгѣ, доходило до энтузіазма [3]).

---

[1]) *Engel und Stäckel,* p. 8, примѣчаніе.

[2]) Интересные комментаріи на книги V и VI см. у *Ганкеля*, pp. 389—404.

[3]) См. его статьи „Euclides" въ *Smith's* Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology и „Irrational Quantity" въ Penny Cyclopaedia или въ English Cyclopaedia. См. также *Nesselmann,* pp. 165—183. Интересно замѣчаніе Дедекинда, относящееся къ ирраціональнымъ количествамъ. См. *Richard Dedekind,* Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1888, pp. XII и XIII. Онъ указываетъ на то, что всѣ Евклидовы построенія фигуръ могли бы быть выполнены, даже если бы плоскость не была непрерывна; т. е. даже и тогда, когда мы вообразимъ себѣ, что изъ плоскости выбиты нѣкоторыя точки, такъ что она стала похожей на рѣшето. Всѣ точки въ Евклидовыхъ построеніяхъ лежали бы между отверстіями; ни одна точка этихъ построеній не упала бы въ отверстіе. Объясненіе всего этого нужно искать въ

Различіе между содержаніемъ *Началъ* и содержаніемъ современныхъ учебниковъ геометріи состоитъ, главнымъ образомъ, въ слѣдующемъ: современныя сочиненія обращаютъ меньше вниманія на „Платоническія фигуры", но зато прибавляютъ теоремы о треугольникахъ и четыреугольникахъ, вписанныхъ въ кругъ или описанныхъ около круга, о центрѣ тяжести треугольника, о сферическихъ треугольникахъ (вообще геометрію на поверхности шара) и иногда излагаютъ нѣкоторыя изъ новѣйшихъ открытій, относящихся къ геометріи плоскаго треугольника и круга.

Главное различіе въ методахъ у Евклида и его современныхъ соперниковъ заключается въ изложеніи теоріи пропорцій и выводахъ соотношеній, существующихъ между размѣрами геометрическихъ фигуръ. Евклидова геометрическая теорія пропорцій позволяетъ ему изучать эти соотношенія, не упоминая объ измѣреніи величинъ. Подобно автору *Началъ*, всѣ греческіе геометры до Архимеда избѣгали измѣренія. Теоремы о томъ, что площадь треугольника равна половинѣ произведенія основанія на высоту, или что площадь круга равна квадрату радіуса, умноженному на π, чужды Евклиду. Онъ нигдѣ и не говоритъ о приближенномъ отношеніи окружности къ діаметру. Другой, отличительной чертой Евклидова изложенія является то, что онъ, въ противность большинству современныхъ писателей, никогда не проводитъ линіи или не строитъ фигуры, не показавъ предварительно возможность дѣйствительно выполнить это построеніе, пользуясь лишь тремя первыми постулатами или какимъ-нибудь раньше изложеннымъ построеніемъ. Первыя три предложенія книги I — не теоремы, а задачи, а именно слѣдующія: (1) начертить равнобедренный треугольникъ, (2) изъ данной точки провести прямую линію, равную данной прямой, (3) отъ большей изъ двухъ прямыхъ линій отнять часть, равную меньшей. Только пользуясь гипотетическими фигурами, современныя книги могутъ относить всѣ построенія къ концу главъ. Напримѣръ, предполагаютъ, что уголъ раз-

томъ обстоятельствѣ, что Евклидъ имѣлъ дѣло съ извѣстными алгебрическими ирраціональными количествами, и что изъ его Геометріи исключены количества трансцендентныя.

дѣленъ пополамъ, не показавъ предварительно возможности и способа такого дѣленія. Одинъ изъ самыхъ поразительныхъ примѣровъ гипотетическаго построенія есть дѣленіе окружности на *произвольное* число равныхъ частей, которое дается въ современныхъ руководствахъ. Это покажется еще болѣе поразительнымъ, когда мы вспомнимъ о теоремѣ, обезсмертившей имя Гаусса, который открылъ, что, кромѣ правильныхъ многоугольниковъ о 2^n, 3, 5 сторонахъ (и ихъ комбинацій), только многоугольники, число сторонъ которыхъ простое, превосходитъ пять и имѣетъ видъ $p = 2^{2^n} + 1$, могутъ быть вписаны въ кругъ съ помощью Евклидовыхъ постулатовъ, т. е. съ помощью только циркуля и линейки [1]). Слѣдуетъ ли рекомендовать избѣгать употребленія гипотетическихъ построеній? Если имѣется въ виду строгость, то на этомъ слѣдуетъ энергически настаивать. Если же предлагающій этотъ вопросъ имѣетъ въ виду слѣдовать признаннымъ педагогическимъ принципамъ, то мы отвѣтимъ ему, что, вообще, при переходѣ отъ конкретной геометріи къ болѣе отвлеченной, часто кажется желательнымъ замѣнять фактами, выведенными изъ наблюденія, малопонятные процессы разсужденія. Даже Евклидъ прибѣгаетъ къ наблюденію, чтобы установить тотъ фактъ, что круги въ предложеніи 1 книги I пересѣкаются [2]). Разсужденія слишкомъ трудныя, и потому малодоступныя пониманію, не развиваютъ ума [3]). Сверхъ того, начинающій, подобно древнимъ эпикурейцамъ, нисколько не интересуется процессами разсужденія, которые *доказываютъ* ему то, что онъ *давно зналъ;* геометрическое разсужденіе болѣе способно заинтересовать его тогда, когда оно открываетъ ему новые факты. Такимъ образомъ, педагогика можетъ съ достаточнымъ основаніемъ требовать *нѣкоторыхъ* уступокъ въ отношеніи строгости доказательствъ.

---

[1]) *Klein*, p. 2.

[2]) Эпикурейцы, говоритъ Проклъ, порицали Евклида за то, что онъ доказывалъ вещи, очевидныя безъ доказательства. Такъ, они смѣялись надъ предложеніемъ 20 книги I (двѣ стороны треугольника больше третьей), говоря, что это очевидно даже для ословъ.

[3]) О спорахъ по предмету Гипотетическихъ Построеній см. *E. L. Richards* въ Educational Review, Vol. III, 1892, p. 34; *G. B. Halsted* въ томъ же журналѣ Vol IV, 1893, p. 152.

Изъ другихъ трудовъ Евклида мы упомянемъ только: *Data,* сочиненіе, вѣроятно, предназначенное для лицъ, окончившихъ изученіе *Началъ* и желавшихъ упражняться въ рѣшеніи новыхъ задачъ; утерянное сочиненіе о *Ложныхъ Выводахъ,* содержавшее упражненія въ раскрытіи ложныхъ выводовъ; трактатъ о *Порисмахъ,* также утерянный, но возстановленный Робертомъ Симсономъ и Мишелемъ Шалемъ *)

Время, въ которое процвѣталъ Евклидъ, было золотымъ вѣкомъ въ исторіи греческой математики. Въ этомъ вѣкѣ появились два наиболѣе самобытныхъ математика древности—*Архимедъ* и *Аполлоній изъ Перги.* Они стоятъ въ ряду величайшихъ математиковъ всѣхъ временъ. Мы можемъ описать здѣсь лишь небольшую часть ихъ открытій.

Архимедъ (287?—212 до Р. Х.) родился въ Сиракузахъ, въ Сициліи. Цицеронъ говоритъ что онъ былъ человѣкомъ низкаго происхожденія. Онъ посѣтилъ Египетъ и, быть можетъ, учился въ Александріи; затѣмъ онъ вернулся въ родную страну, гдѣ оказалъ большія услуги высоко цѣнившему его другу и покровителю царю Гіерону, примѣняя свою необыкновенную изобрѣтательность къ построенію военныхъ орудій, которыми причинилъ большія потери римлянамъ, осаждавшимъ его родной городъ подъ предводительствомъ Марцелла. Говорятъ, что онъ зажегъ римскіе корабли съ помощью зеркалъ, отражавшихъ солнечные лучи, когда корабли эти подошли къ стѣнамъ города на разстояніе полета стрѣлы, но разсказъ этотъ, вѣроятно, представляетъ собою выдумку. Сиракузы были, наконецъ, взяты римлянами, которые, войдя въ городъ, стали избивать всѣхъ безъ разбора; во время этой рѣзни погибъ и Архимедъ. Разсказываютъ, что онъ въ это время занимался изученіемъ какой-то геометрической фигуры, начерченной на пескѣ. Увидѣвъ приближавшагося къ нему римскаго солдата, онъ закричалъ ему: „не испорти моихъ круговъ!“ солдатъ же, считая себя оскорбленнымъ, убилъ его. Римскій военачальникъ Марцеллъ, поклонникъ его генія, воздвигъ въ честь его гробницу, на которой изображенъ былъ шаръ, вписанный въ цилиндръ.

---

*) См. прибавленіе въ концѣ книги.

Жители Сицилии не чтили памяти Архимеда; когда Цицеронъ посѣтилъ Сиракузы, онъ нашелъ его могилу засыпанной мусоромъ.

Хотя соотечественники и восхищались главнымъ образомъ механическими изобрѣтеніями Архимеда, самъ онъ цѣнилъ выше свои открытія въ области чистой науки.

Особый интересъ имѣетъ для насъ его книга *Объ измѣреніи круга* [1]). Онъ доказываетъ сначала, что площадь круга равна площади прямоугольнаго треугольника, основаніемъ котораго служитъ окружность, а высотою радіусъ. Слѣдующая задача состоитъ въ отысканіи этого основанія. Онъ находитъ прежде всего верхній предѣлъ для отношенія окружности къ діаметру. Построивъ равносторонній треугольникъ, вершина котораго находится въ центрѣ круга, а основаніемъ служитъ линія касательная къ кругу, онъ проводитъ бисектриссу центральнаго угла и опредѣляетъ отношеніе основанія къ высотѣ въ одномъ изъ полученныхъ такимъ образомъ прямоугольныхъ треугольниковъ, при чемъ беретъ приближенное значеніе ирраціональнаго квадратнаго корня съ небольшимъ недостаткомъ. Затѣмъ проводится бисектрисса центральнаго угла этого прямоугольнаго треугольника и опредѣляется отношеніе его катетовъ. Потомъ проводится бисектрисса центральнаго угла этого послѣдняго прямоугольнаго треугольника и вычисляется отношеніе его катетовъ. Это дѣленіе угловъ пополамъ и вычисленіе отношеній производится четыре раза, при чемъ ирраціональные квадратные корни берутся каждый разъ съ небольшимъ недостаткомъ. Отношеніе катетовъ, разсматриваемыхъ въ послѣдній разъ $> 4673\frac{1}{2} : 153$. Но меньшій изъ катетовъ,

---

1) Новѣйшее, образцовое изданіе его твореній принадлежитъ *Гейбергу,* Лейпцигъ, 1880—81. Болѣе полное изложеніе содержанія книги *Объ измѣреніи круга* см. у *Кантора,* I, pp. 285—288, 301—304; *Loria,* II, pp. 126 — 132; *Gow,* pp. 233 — 237; *H. Weissenborn,* Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano, Berlin, 1894 *).

*) *Ѳ. И. Петрушевскій* перевелъ „двѣ книги Архимеда о шарѣ и цилиндрѣ, *измѣреніе круга* и леммы" (СПБ., 1823) и „Псаммитъ, или исчисленіе песку въ пространствѣ, равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ" (СПБ., 1824). *Прим. ред.*

имѣющихъ это отношеніе, есть сторона правильнаго описаннаго многоугольника. Это приводитъ Архимеда къ заключенію, что отношеніе окружности къ діаметру $< 3\frac{1}{7}$. Онъ находитъ затѣмъ низшій предѣлъ, вписывая правильные многоугольники о 6, 12, 24, 48, 96 сторонахъ и находя последовательно периметры всѣхъ этихъ многоугольниковъ. Такимъ путемъ приходитъ онъ къ низшему предѣлу $3\frac{10}{71}$. Отсюда слѣдуетъ, наконецъ, что $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$, что даетъ возможность вычислять приближенную длину окружности съ точностью, достаточною въ большинствѣ случаевъ.

Достойно примѣчанія то обстоятельство, что, хотя и до Архимеда еще египтяне находили приближенныя значенія π, у Евклида и его греческихъ предшественниковъ не встрѣчается никакихъ слѣдовъ такихъ вычисленій. Чѣмъ объяснить этотъ странный пробѣлъ въ греческой геометріи до Архимеда? Можетъ быть, причиной этого было то, что греческій идеализмъ исключалъ изъ геометріи всякія вычисленія, изъ боязни, что эта благородная наука потеряетъ свою строгость и снизойдетъ до уровня геодезіи или землемѣрія. Аристотель говоритъ, что истины, относящіяся къ геометрическимъ величинамъ, не могутъ быть доказаны съ помощью науки, настолько чуждой геометріи, какъ ариѳметика. Истинная причина, быть можетъ, та, что нѣкоторые древніе критики отрицали очевидность того, что прямая линія можетъ быть равной по длинѣ кривой; въ частности, что существуетъ прямая линія, по длинѣ своей равная окружности. Это отрицаніе ставитъ дѣйствительную преграду на пути геометрическихъ разсужденій. Евклидъ основываетъ равенство между линіями и между площадями на ихъ совпаденіи. Поэтому, такъ какъ никакая кривая линія и даже никакая ея часть не могутъ быть приведены къ *точному* совпаденію съ прямой линіей и даже ни съ какой частью прямой, нельзя никоимъ образомъ сравнивать, по длинѣ, кривой линіи съ прямой. Такимъ образомъ, у Евклида мы и не находимъ нигдѣ предложенія, въ которомъ было бы сказано, что кривая линія равна прямой. Методъ, употребляемый въ греческой геометріи, дѣйствительно исключаетъ подобныя сравненія; по Дюгамелю, чтобы установить логически возможность

такихъ сравненій, необходимо пользоваться современнымъ понятіемъ о предѣлѣ[1]). Исходя изъ принятыхъ Евклидомъ положеній, нельзя даже *доказать*, что периметръ описаннаго (вписаннаго) многоугольника больше (меньше), чѣмъ окружность. Нѣкоторые писатели, умалчивая о томъ, прибѣгаютъ къ наблюденію; они *видятъ*, что это такъ.

Архимедъ пошелъ дальше и не только допустилъ это, но, *довѣряясь созерцанію*, сдѣлалъ дальнѣйшее скрытое допущеніе о томъ, что существуетъ прямая линія, по длинѣ своей равная окружности. Основываясь на этомъ, онъ сдѣлалъ цѣнный вкладъ въ науку геометріи. Въ этомъ случаѣ научный прогрессъ слѣдовалъ своему обыкновенному пути. Открытія, составляющія эпоху въ исторіи науки, обыкновенно, при рожденіи своемъ, не поддерживаются со всѣхъ сторонъ непреклонной логикой; наоборотъ, только созерцательныя способности руководятъ изслѣдователемъ въ трудныхъ мѣстахъ его пути. Подобные же примѣры въ исторіи науки представляютъ открытія Ньютона въ математикѣ и Максвелля въ физикѣ. *Полная* цѣпь разсужденій, устанавливающихъ справедливость открытой истины, составляется обыкновенно въ позднѣйшій періодъ.

Не наблюдается ли тотъ же законъ и при движеніи впередъ отдѣльныхъ умовъ? Мы приходимъ сначала къ истинѣ, не понимая вполнѣ ея основаній. Да и не всегда наиболѣе желательно, чтобы молодой умъ съ самаго начала старался понять ихъ всѣ. При обученіи геометріи, когда разсужденіе слишкомъ трудно для усвоенія, слѣдуетъ пользоваться результатами наблюденій, если это можетъ помочь пониманію излагаемыхъ истинъ. Учащійся не можетъ ждать, пока онъ выучитъ теорію предѣловъ и высшій анализъ, прежде, чѣмъ узнать ту истину, что окружность больше, чѣмъ периметръ вписаннаго многоугольника.

Изъ всѣхъ своихъ открытій Архимедъ больше всего цѣнилъ тѣ, которыя изложены въ книгѣ о *Шарѣ и Цилиндрѣ*. Въ этой книгѣ онъ пользуется знаменитой аксіомой, что „прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя

---

[1]) *G. B. Halsted* въ Tr. Texas Academy of Science, I, p. 96.

точками“; это предложенiе онъ не считаетъ, однако, формальнымъ опредѣленiемъ прямой.[1]). Архимедъ доказываетъ новыя теоремы, состоящiя въ томъ, что поверхность шара вчетверо больше площади большого круга; что поверхность шарового сегмента равна площади круга, радiусъ котораго равенъ прямой, соединяющей вершину сегмента съ точкой окружности круга, служащаго ему основанiемъ; что объемъ и поверхность шара составляютъ $\frac{2}{3}$ объема и поверхности, соотвѣтственно, цилиндра, описаннаго около шара. Архимедъ желалъ, чтобы чертежъ этого послѣдняго предложенiя былъ изображенъ на его гробницѣ, что и было исполнено римскимъ военачальникомъ Марцелломъ*).

Стереометрiя обязана Архимеду и другими, дальнѣйшими успѣхами; онъ прибавилъ къ пяти „Платоническимъ фигурамъ“ тринадцать *полу-правильныхъ тѣлъ*, каждое изъ которыхъ ограничено правильными многоугольниками, но не одного и того же рода. Къ области элементарной геометрiи принадлежатъ также его пятнадцать *Леммъ*[2]).

Изъ трудовъ „Великаго Геометра“ *Аполлонiя Пергскаго*, который жилъ лѣтъ сорокъ послѣ Архимеда и который изслѣдовалъ свойства коническихъ сѣченiй, мы упомянемъ, кромѣ его знаменитаго сочиненiя о *Коническихъ сѣченiяхъ*, только потерянное сочиненiе о *Касанiяхъ*, которое Вiета и другiе пытались возстановить на основанiи нѣкоторыхъ леммъ, данныхъ Паппомъ. Оно содержало рѣшенiе знаменитой „Аполлонiевой Задачи“: найти кругъ, касательный къ тремъ даннымъ кругамъ. Эта задача и въ новѣйшее время послужила стимуломъ для усовершенствованiя геометрическихъ методовъ[3]).

Въ эпоху Евклида, Архимеда и Аполлонiя греческая геометрiя достигла высшей точки своего развитiя. Мало, однако, извѣстно объ исторiи геометрiи со временъ Аполлонiя до начала христiанской эры. Въ этомъ промежуткѣ

[1]) *Cantor,* I, 283.

*) См. прибавленiе въ концѣ книги. *Прим. ред.*

[2]) Ср. *Gow,* p. 232; *Cantor,* I, p. 283.

[3]) Ср. *E. Schilke*, Die Lösungen und Erweiterungen des Apollonischen Berührungsproblems, Berlin, 1880.

времени жилъ *Зенодоръ,* писавшій о *Фигурахъ, имѣющихъ равную периферію.* Книга эта утеряна, но четырнадцать предложеній, заимствованныхъ изъ нея, сохранились у Паппа, а также у Θеона. Вотъ три изъ нихъ: „площадь круга больше, чѣмъ площадь всякаго многоугольника, периметръ котораго равенъ окружности", „изъ всѣхъ многоугольниковъ съ одинаковымъ числомъ сторонъ и равными периметрами правильный многоугольникъ наибольшій", „изъ всѣхъ тѣлъ, имѣющихъ одну и ту же поверхность, наибольшій объемъ имѣетъ шаръ".

Между 200 и 100 годами до Р. Х. жилъ *Гипсиклъ,* предполагаемый авторъ четырнадцатой книги Евклидовыхъ *Началъ.* Его трактатъ о *Восхожденіяхъ* — древнѣйшее греческое сочиненіе, въ которомъ, по примѣру вавилонянъ, дано дѣленіе круга на 360 градусовъ.

Гиппархъ изъ Никеи въ Виθиніи, авторъ знаменитой теоріи эпицикловъ и эксцентриковъ, былъ величайшимъ астрономомъ древности. Θеонъ Александрійскій передаетъ намъ, что онъ положилъ основаніе науки *тригонометріи* и вычислилъ „таблицу хордъ" въ двѣнадцати книгахъ (до насъ не дошедшихъ). Гиппархъ производилъ астрономическія наблюденія между 161 и 126 гг. до Р. Х.

Писатель, сочиненія котораго по слогу сильно отличаются отъ сочиненій великихъ ученыхъ первой Александрійской школы,—*Геронъ Александрійскій,* называемый еще Герономъ Старшимъ [1]). Онъ былъ практическимъ землемѣромъ; поэтому и неудивительно, что въ сочиненіяхъ его мы находимъ мало сходства съ трудами Евклида или Аполлонія.

Геронъ былъ ученикомъ Ктесивія, знаменитаго своими механическими изобрѣтеніями: гидравлическимъ органомъ, водяными часами, катапультой и т. п. Нѣкоторые полагаютъ, что Геронъ былъ сыномъ Ктесивія. Героновы изобрѣтенія, эолипилъ и любопытный механизмъ, извѣстный подъ названіемъ „Геронова фонтана", показываютъ, что у него былъ

[1]) По *Кантору,* I, 347, онъ жилъ около 100 г. до Р. Х., по *Marie,* I, 177, около 155 г. до Р. Х.

такой же талантъ, какъ и у его учителя. Дѣйствительная принадлежность Герону нѣкоторыхъ изъ приписываемыхъ ему сочиненій возбуждаетъ большія сомнѣнія. Большая часть ученыхъ полагаетъ, что онъ именно является авторомъ сочиненія, озаглавленнаго *Dioptra*, которое дошло до насъ въ трехъ рукописяхъ, совершенно несходныхъ другъ съ другомъ. Мари [1]) думаетъ, что *Dioptra*—трудъ, принадлежащій писателю седьмого или восьмого вѣка по Р. Х., называемому *Герономъ Младшимъ*. Но у насъ нѣтъ свидѣтельства, на которое можно было бы положиться, о томъ, что дѣйствительно существовалъ другой математикъ, носившій имя Герона [2]). Въ доказательство поздняго происхожденія книги *Dioptra* Мари приводитъ, между прочимъ, тотъ фактъ, что книга эта—первое сочиненіе, въ которомъ находится важная формула для вычисленія площади треугольника съ помощью трехъ сторонъ. Ни одинъ греческій писатель не упоминаетъ, однако, объ этой формулѣ; поэтому Мари считаетъ невѣроятнымъ предположеніе о томъ, что книга *Dioptra* была написана въ такое раннее время, какъ эпоха Герона Старшаго. Аргументъ этотъ неубѣдителенъ, такъ какъ до насъ дошла лишь небольшая часть греческой математической литературы этого періода. Формула, называемая иногда „Героновой формулой“, выражаетъ площадь треугольника слѣдующимъ образомъ:

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}},$$

гдѣ a, b, c—стороны треугольника. Данное у Герона доказательство этой формулы, хотя и трудно, но чрезвычайно остроумно и обнаруживаетъ у автора не малый математическій талантъ [3]).

„Діоптры“, говоритъ Вентури, „были приборы, похожіе на наши современные теодолиты. Приборъ состоялъ изъ линейки, длиною въ четыре локтя, съ небольшими пластинками по концамъ—для визированія. Линейка

[1]) *Marie*, Histoire des Sciences mathematiques et physiques, I, 180.

[2]) *Cantor*, I, 348.

[3]) Доказательство - см. *Dioptra* (Ed. *Hultsch*), pp. 235—237; *Cantor*, I, 360; *Gow*, p. 281.

эта покоилась на кругломъ дискѣ; ее можно было передвигать какъ въ горизонтальномъ, такъ и въ вертикальномъ направленіи. Вращая линейку до тѣхъ поръ, пока она не упиралась въ двѣ втулки, соотвѣтствующимъ образомъ расположенныя на дискѣ, съемщикъ могъ опредѣлить направленіе, перпендикулярное къ данной линіи. При этомъ употреблялись уровень и отвѣсъ [1])". Геронъ объясняетъ, какъ рѣшать при помощи этихъ инструментовъ и геометріи большое число задачъ,—напримѣръ, какъ найти разстояніе между двумя точками, изъ которыхъ только къ одной можно подойти, или между двумя точками, которыя можно видѣть, но ни къ одной изъ которыхъ нельзя подойти; провести перпендикуляръ къ недоступной линіи; найти разность уровней двухъ точекъ; измѣрить площадь поля, не вступая на него.

Книга *Dioptra* обнаруживаетъ большія математическія способности автора, а также близкое знакомство его съ сочиненіями математиковъ классическаго періода. Геронъ читалъ Гиппарха и написалъ комментаріи на Евклида [2]). Тѣмъ не менѣе характеръ его геометріи не греческій, а египетскій. Обыкновенно онъ даетъ указанія и правила безъ доказательствъ. Онъ даетъ формулы для вычисленія площади правильнаго многоугольника по квадрату одной изъ его сторонъ, что предполагаетъ знаніе тригонометріи. Нѣкоторыя изъ формулъ Герона указываютъ на происхожденіе свое изъ древнеегипетскихъ источниковъ. Такъ, кромѣ формулы для площади треугольника, приведенной выше, онъ даетъ формулу $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b}{2}$, которая имѣетъ поразительное сходство съ формулой $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b_1+b_2}{2}$ для опредѣленія площади четыреугольника, найденной на надписяхъ въ Эдфу. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ сочиненія Герона напоминаютъ папирусъ Ахмеса. Такъ, Ахмесъ употреблялъ исключительно доли единицы; Геронъ пользовался ими чаще, чѣмъ дру-

[1]) *Cantor,* I, 356.

[2]) См. *Tannery,* pp. 165—181.

гими дробями. Что ариѳметическія теоріи Ахмеса не были еще забыты въ это время, доказываетъ также Ахмимскій папирусъ, который, хотя и есть древнѣйшее изъ существующихъ греческихъ руководствъ по практической ариѳметикѣ, но написанъ, по всей вѣроятности, послѣ Герона. Подобно Ахмесу и жрецамъ въ Эдфу, Геронъ раздѣляетъ сложныя фигуры на простѣйшія, проводя вспомогательныя линіи; подобно имъ онъ обнаруживаетъ особое пристрастіе къ равнобочной трапеціи.

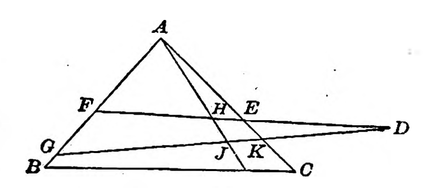
Сочиненія Герона удовлетворяли практическимъ потребностямъ своего времени и потому имѣли обширный кругъ читателей даже и въ позднѣйшія времена. Мы находимъ слѣды ихъ въ Римѣ, на западѣ въ средніе вѣка и даже въ Индіи.

VI. Вторая Александрійская школа. Послѣ того, какъ Египетъ вошелъ въ составъ Римской Имперіи и распространилось христіанство, Александрія сдѣлалась большимъ торговымъ и интеллектуальнымъ центромъ. Купцы всѣхъ странъ толпились на ея улицахъ, тогда какъ въ ея великолѣпной библіотекѣ, въ ея музеяхъ и аудиторіяхъ встрѣчались ученые съ Запада и Востока. Греческіе мыслители стали изучать восточную литературу и философію. Происшедшее отъ этого смѣшеніе греческой и восточной философіи привело къ нео-пиѳагорейству и нео-платонизму. Изученіе платонизма и пиѳагорейскаго мистицизма привело къ возрожденію теоріи чиселъ. Эта теорія снова сдѣлалась любимой наукой, хотя геометрія все еще продолжала занимать важное мѣсто. Эта вторая Александрійская школа, начало которой совпадаетъ съ христіанской эрой, прославилась именами Діофанта, Клавдія Птолемея, Паппа, Ѳеона Смирнскаго, Ѳеона Александрійскаго, Ямвлиха, Порфирія, Серена изъ Антинейи, Менелая и другихъ.

Менелай Александрійскій жилъ около 98 г. по Р. Х., какъ показываютъ два астрономическихъ наблюденія, произведенныя имъ и записанныя въ *Альмагестъ*[1]). Онъ сдѣлалъ цѣнные вклады въ науку сферической тригонометріи въ

[1]) *Cantor*, I, 385.

своемъ сочиненіи *Sphaerica*, греческій оригиналъ котораго потерянъ, но которое дошло до насъ въ переводахъ на еврейскій и арабскій языки. Онъ даетъ теоремы, относящіяся къ равенству сферическихъ треугольниковъ, и описываетъ ихъ свойства, слѣдуя приблизительно тому пути, по которому шелъ Евклидъ при изслѣдованіи плоскихъ треугольниковъ. Онъ даетъ теоремы о томъ, что сумма трехъ сторонъ сферическаго треугольника меньше окружности большого круга, и что сумма трехъ угловъ больше двухъ прямыхъ. Особой извѣстностью пользуются двѣ его теоремы о плоскихъ и сферическихъ треугольникахъ. Теорема о плоскихъ треугольникахъ состоитъ въ слѣдующемъ: „если какая-нибудь прямая линія пересѣкаетъ три стороны треугольника, то произведеніе трехъ отрѣзковъ, не имѣющихъ общихъ точекъ, равно произведенію трехъ другихъ отрѣзковъ“. Знаменитый Лазаръ Карно кладетъ это предложеніе, извѣстное подъ названіемъ „леммы Менелая“ въ основаніе своей теоріи трансверсалей[1]). Соотвѣтствующая теорема о сферическихъ треугольникахъ, извѣстная подъ названіемъ „правила шести количествъ“, получается изъ упомянутой теоремы замѣной словъ „три отрѣзка“ словами „хорды, стягивающія три удвоенныхъ отрѣзка“. Другая основная теорема въ новой геометріи (въ теоріи гармоническихъ группъ)— слѣдующая теорема, приписываемая *Серену* изъ Антинейи: Если мы изъ точки D проведемъ прямую DF, пересѣкающую треугольникъ ABC, выберемъ на ней точку H такъ, чтобы DE : DF = HE : HF, и проведемъ затѣмъ линію AH, то



[1]) Исторію этой теоремы см. въ соч. *M. Chasles*, Geschichte der Geometrie. Aus dem Französichen übertragen durch *Dr. L. A. Sohncke*, Halle, 1839, прилож. VI, стр. 295—299. Мы будемъ впослѣдствіи цитировать это сочиненіе, какъ *Chasles*. Новое французское изданіе этого важнаго труда теперь легко достать. Шаль указываетъ на то, что „лемма Менелая“ была хорошо извѣстна въ шестнадцатомъ и семнадцатомъ столѣтіяхъ, но съ этого времени въ теченіе болѣе столѣтія она оставалась безплодной и почти неизвѣстной до того времени, когда Карно началъ свои изслѣдованія. Карно такъ же, какъ и Чева, снова открылъ эту теорему.

всякая трансверсаль, проходящая черезъ D, какъ, напримѣръ, DG, раздѣлится линіей AH такъ, что $DK:DG = JK:JG$. Годъ основанія Антинейи (или Антиноуполиса) въ Египтѣ, императоромъ Адріаномъ—122 г. по Р. Х.—даетъ намъ нижнюю границу времени, въ которое жилъ Серенъ[1]). Тотъ фактъ, что онъ цитируется писателемъ, жившимъ въ пятомъ или шестомъ вѣкѣ, доставляетъ намъ верхнюю границу.

Центральное положеніе въ исторіи древней астрономіи занимаетъ *Клавдій Птолемей*. Изъ его біографіи извѣстно только то, что онъ былъ родомъ изъ Египта и жилъ въ Александріи въ 139 г. по Р. Х. Главныя изъ его сочиненій—*Syntaxis Mathematica* (или *Альмагестъ*, какъ называли его арабы) и *Geographica*. Здѣсь не мѣсто излагать „Птолемееву систему"; мы упоминаемъ о Птолемеѣ лишь въ связи съ особенностями геометріи и, главнымъ образомъ, тригонометріи, заключенныхъ въ *Альмагестѣ*. Птолемей раздѣляетъ кругъ на 360 градусовъ, діаметръ на 120 дѣленій, каждое изъ нихъ на 60 частей, которыя снова дѣлятся на 60 меньшихъ частей. По латыни эти части назывались *partes minutae primae* и *partes minutae secundae*[2]). Отсюда и произошли наши названія—„минуты" и „секунды". Такимъ образомъ Вавилонская шестидесятичная система, извѣстная еще Гемину и Гиппарху, ко времени Птолемея прочно утвердилась въ Египтѣ. Основанія тригонометріи были положены знаменитымъ Гиппархомъ. Птолемей придалъ ей замѣчательно совершенную форму. Онъ вычислилъ таблицу хордъ по методу, который, повидимому, принадлежитъ ему самому. Доказавъ предложеніе, которое теперь обыкновенно прилагается къ VI книгѣ Евклидовыхъ *Началъ* (D)*), состоящее въ томъ, что „прямоугольникъ, стороны котораго равны діагоналямъ вписанной въ кругъ четыреугольной фигуры, равновеликъ суммѣ двухъ прямоугольниковъ, сторонами которыхъ являются противуположныя ея стороны",—онъ показываетъ, какъ найти по хордамъ двухъ дугъ хорды ихъ суммы и разности, и по

---

[1]) *J. L. Heiberg* въ Bibliotheca Mathematica, 1894, p. 97.

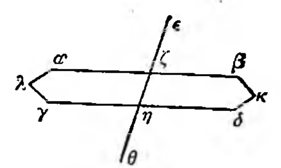
[2]) *Cantor*, I, p. 388.

*) Въ англійскихъ изданіяхъ Евклида. *Прим. ред.*

хордѣ какой-нибудь дуги хорду ея половины. Эти теоремы, которыя онъ очень искусно доказываетъ [1]), прилагаются къ вычисленію хордъ. Само собою разумѣется, что терминологія и обозначенія (поскольку онъ пользуется таковыми) у Птолемея совершенно отличаются отъ тѣхъ, которыя употребляются въ современной тригонометріи. Вмѣсто нашего „синуса“ онъ разсматриваетъ „хорду двойной дуги“. Такъ, въ его таблицѣ, хорда 21 . 21 . 12 соотвѣтствуетъ дугѣ 20° 30′. Переходя отъ шестидесятичныхъ долей къ десятичнымъ, мы найдемъ для длины хорды число 0.35588. Половина его 0.17794 есть *синусъ* 10° 15′, или половины 20° 30′.

Теоретическое изложеніе сферической тригонометріи у Птолемея полнѣе, чѣмъ изложеніе тригонометріи прямолинейной [2]). Птолемей начинаетъ съ теоремъ Менелая. На первый взглядъ тотъ фактъ, что сферическая тригонометрія развилась раньше прямолинейной, кажется нѣсколько страннымъ, но это объясняется тѣмъ, что тригонометріей занимались не ради нея самой, а ради приложенія ея къ астрономіи.

Особенный интересъ представляетъ для насъ доказательство Евклидова постулата параллельныхъ линій, данное, по словамъ Прокла, Птолемеемъ. Часть этого доказательства, не выдерживающая критики, состоитъ въ слѣдующемъ: если прямыя линіи параллельны, то необходимо, чтобы внутренніе односторонніе углы были равны двумъ прямымъ. Ибо $\alpha\zeta$, $\gamma\eta$ параллельны такъ же, какъ $\zeta\beta$, $\eta\delta$, и поэтому, какова бы ни была сумма угловъ $\beta\zeta\eta$, $\zeta\eta\delta$, больше или меньше двухъ прямыхъ, такова же должна быть и сумма угловъ $\alpha\zeta\eta$, $\zeta\eta\gamma$. Но сумма этихъ четырехъ угловъ не можетъ быть больше



четырехъ прямыхъ, потому что углы эти представляютъ двѣ пары смежныхъ [3]). Слабый пунктъ доказательства представляетъ то утвержденіе, что въ случаѣ параллельности линій суммы обѣихъ паръ внутреннихъ одностороннихъ угловъ должны быть равны. Птолемей былъ, повидимому, первымъ въ длинномъ ряду

[1]) Ср. *Cantor,* I, 389, гдѣ приведены доказательства.

[2]) Ср. *Cantor,* I, p. 392; *Gow,* p. 297.

[3]) *Gow,* p. 301.

геометровъ, напрасно пытавшихся, въ теченіе восемнадцати столѣтій *доказать* постулатъ параллельныхъ линій, пока, наконецъ, геній Лобачевскаго и Больэ не разсѣялъ тумана, мѣшавшаго математикамъ видѣть невозможность такихъ доказательствъ, и не указалъ имъ съ безошибочной ясностью на ту причину, по которой доказательства были и всегда будутъ призрачными.

Въ теченіе около 150 лѣтъ послѣ Птолемея не было замѣчательныхъ геометровъ. *Sextus Julius Africanus* написалъ сочиненіе *Cestes*, прилагающее геометрію къ военному искусству, но не представляющее никакого интереса. *Паппъ* (около 300 или 370 г. по Р. X.) былъ послѣднимъ великимъ математикомъ Александрійской школы. Хотя по своему генію онъ и ниже Архимеда, Аполлонія и Евклида, которые жили за пять вѣковъ до него, однако, надъ своими современниками онъ возвышался, какъ гора надъ окружающей ее равниной. Изъ различныхъ его сочиненій дошелъ до насъ лишь его *Математическій сборникъ*, да и то не въ полномъ видѣ. Сочиненіе это было въ восьми книгахъ; недостаетъ первой книги и нѣкоторыхъ частей второй. Этотъ трактатъ, повидимому, имѣлъ цѣлью дать геометрамъ краткій разборъ наиболѣе трудныхъ математическихъ сочиненій и облегчить изученіе ихъ посредствомъ объяснительныхъ леммъ. Онъ неоцѣнимъ для насъ, какъ богатый источникъ свѣдѣній о различныхъ трудахъ наиболѣе выдающихся греческихъ математиковъ, трудахъ, которые теперь потеряны. Ученые восемнадцатаго вѣка считали возможнымъ возстановить потерянныя сочиненія только по резюмэ ихъ, даннымъ Паппомъ. Нѣкоторыя изъ теоремъ, безъ сомнѣнія, принадлежатъ самому Паппу, но трудно рѣшить, какія именно: въ трехъ случаяхъ Паппъ приводитъ чужія теоремы, не упоминая объ ихъ авторахъ, извѣстныхъ намъ изъ другихъ источниковъ; онъ могъ поступать такъ же и въ другихъ случаяхъ, въ которыхъ мы не имѣемъ никакихъ средствъ удостовѣриться въ томъ, кто именно открылъ теоремы. Изъ элементарныхъ предложеній, представляющихъ для насъ особый интересъ и, вѣроятно, принадлежащихъ самому Паппу, мы упомянемъ слѣдующія: (1) центръ инерціи (тяжести) треугольника при-

надлежитъ также другому треугольнику, вершины котораго лежатъ на сторонахъ даннаго и раздѣляютъ эти стороны въ одномъ и томъ же отношенiи; (2) рѣшенiе задачи о проведенiи черезъ три точки, лежащiя на одной прямой, трехъ прямыхъ линiй, образующихъ треугольникъ, вписанный въ данный кругъ [1]); (3) Паппъ предложилъ теорiю инволюцiи точекъ; (4) прямая, соединяющая противуположные концы паралельныхъ дiаметровъ двухъ круговъ, имѣющихъ внѣшнее касанiе, проходитъ черезъ точку касанiя (теорема, намекающая на разсмотрѣнiе центровъ подобiя двухъ круговъ); (5) рѣшенiе задачи о нахожденiи параллелограмма, стороны котораго находятся въ опредѣленномъ отношенiи къ сторонамъ даннаго параллелограмма, площадь же — въ другомъ опредѣленномъ отношенiи къ площади даннаго. Эта задача походитъ нѣсколько на неопредѣленную задачу, данную Герономъ,— построить два треугольника, суммы сторонъ которыхъ, а также и площади, находятся въ данныхъ отношенiяхъ [2]).

Намъ остается упомянуть только о нѣсколькихъ другихъ математикахъ. *Θеонъ Александрiйскiй* издалъ Евклидовы *Начала* съ примѣчанiями; его комментарiй къ *Альмагесту* цѣненъ своими историческими примѣчанiями и находящимися въ немъ образчиками греческой ариθметики. Дочь Θеона, *Гипатiя,* женщина, славившаяся своей красотой и скромностью, была послѣдней изъ знаменитыхъ ученыхъ Александрiи. Ея комментарiи къ Дiофанту и Аполлонiю утеряны. Трагическая смерть ея въ 415 г. по Р. Х. живо описана Кингслеемъ въ его романѣ *Гипатiя* [3]).

---

[1]) „Задача эта, обобщенная на тотъ случай, когда данныя три точки расположены какъ-нибудь на плоскости, стала знаменитой, отчасти благодаря своей трудности, отчасти благодаря именамъ геометровъ, рѣшившихъ ее, но въ особенности благодаря рѣшенiю ея столь же общему, сколь и простому, данному шестнадцатилѣтнимъ мальчикомъ Оттайяно изъ Неаполя“. *Chasles,* p. 41. Шаль даетъ исторiю этой задачи въ *прибавленiи* XI.

[2]) *Cantor,* I, p. 425.

[3]) Читатель съ интересомъ прочтетъ статью: *G. Valentin,* „Die Frauen in den exakten Wissenschaften“, Bibliotheca Mathematica, 1895 pp. 65—76 *).

*) Ср. прибавленiе въ концѣ книги.

Съ этого времени христіанское богословіе стало, мало-по-малу, совершенно поглощать человѣческую мысль. Въ Александріи язычество исчезло, а съ нимъ вмѣстѣ исчезла и языческая наука. Нео-платоническая школа въ Аѳинахъ боролась въ теченіе еще одного столѣтія. Проклъ, Исидоръ и другіе старались удержать въ цѣлости „золотую цѣпь Платонова преемства". *Проклъ* написалъ комментаріи къ Евклиду; сохранилась часть, относящаяся къ первой книгѣ и имѣющая большую историческую цѣнность. Одинъ изъ учениковъ Исидора, *Дамасцій* изъ Дамаска (около 510 г. по Р. Х.), былъ, какъ нѣкоторые полагаютъ, авторомъ XV книги Евклидовыхъ *Началъ*.

Геометры послѣднихъ 500 лѣтъ этого періода, быть можетъ за исключеніемъ Паппа, лишены творческой силы; они скорѣе комментаторы, чѣмъ оригинальные изслѣдователи.

Выдающимися чертами греческой геометріи являются:

(1) Удивительная ясность и опредѣленность понятій и исключительная логическая строгость выводовъ. Въ разсужденіяхъ грековъ мы встрѣчали кое-гдѣ промахи. Но когда мы сравнимъ греческую геометрію въ ея наиболѣе совершенной формѣ съ лучшими твореніями вавилонянъ, египтянъ, римлянъ, индусовъ или средневѣковыхъ геометровъ, то намъ придется признать, что не только по строгости изложенія, но и по плодовитости изобрѣтательнаго ума греческіе геометры стоятъ, въ своемъ одинокомъ величіи, значительно выше всѣхъ другихъ.

(2) Полное отсутствіе общихъ принциповъ и методовъ*). У грековъ, напримѣръ, не было никакого общаго метода для проведенія касательныхъ. При доказательствѣ теоремы для древнихъ геометровъ было столько же различныхъ случаевъ, требующихъ отдѣльныхъ доводовъ, сколько было различныхъ положеній разсматриваемыхъ въ теоремѣ линій [1]).

„Одно изъ наибольшихъ преимуществъ новой геометріи передъ древней состоитъ въ томъ, что новая гео-

*) Ср. приложеніе въ концѣ книги.

[1]) См., напримѣръ, у Евклида, III, 35.

метрія, разсматривая положительныя и отрицательныя количества, обнимаетъ въ *одномъ* выраженіи нѣсколько случаевъ, которые можетъ представить теорема соотвѣтственно различнымъ относительнымъ положеніямъ отдѣльныхъ частей фигуры, составляющей предметъ этой теоремы. Такъ, въ наше время девять главныхъ задачъ и многочисленные особые случаи, составляющіе предметъ 83 теоремъ въ двухъ книгахъ *de sectione determinata* (Паппа), приводятся къ *одной* только задачѣ, которая можетъ быть рѣшена съ помощью *одного единственнаго* уравненія"[1]. „Если мы сравнимъ математическую задачу съ большой скалой, во внутрь которой мы хотимъ проникнуть, то работа греческихъ математиковъ покажется намъ подобной труду сильнаго каменотеса, который, вооружившись рѣзцомъ и молоткомъ, начинаетъ съ неутомимой настойчивостью, медленно раздроблять извнѣ скалу въ мелкіе куски; современный математикъ покажется намъ отличнымъ рудокопомъ, который пробуравливаетъ сначала скалу въ немногихъ мѣстахъ, черезъ продѣланные такимъ образомъ ходы разрываетъ ее на части однимъ могучимъ взрывомъ и овладѣваетъ находящимися внутри ея сокровищами[2]."

РИМЪ.

Хотя римляне превосходили другіе народы въ наукѣ государственной и военной, но въ философіи, поэзіи и искусствѣ они были простыми подражателями. Въ математикѣ они не поднялись даже и до желанія подражать. Если мы исключимъ періодъ упадка, въ который стали читать Евклида, то можно будетъ сказать, что греческіе классическіе писатели-геометры были совершенно неизвѣстны въ Римѣ. Науки геометріи, съ опредѣленіями, постулатами, аксіомами, строгими доказательствами—тамъ не было. *Практическая* геометрія, подобная древне-египетской, съ эмпирическими правилами, приложимыми къ землемѣрію, замѣняла греческую

[1]) *Chasles,* p. 39.

[2]) *Hermann Hankel,* Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, Tübingen, 1884, p. 9.

науку. Практическія руководства, написанныя римскими землемѣрами, называвшимися *agrimensores* или *gromatici*, дошли и до насъ. „Что касается геометрической части этихъ пандектовъ, въ которыхъ также подробно говорится о юридической и чисто технической сторонѣ землемѣрнаго искусства, то трудно сказать, что больше отталкиваетъ читателя: грубость ли изложенія или бѣдность и ошибочность содержанія. Изложеніе ниже всякой критики, терминологія неустойчива; объ опредѣленіяхъ и аксіомахъ или доказательствахъ предписываемыхъ правилъ нѣтъ и рѣчи. Правила не формулированы; читателю предоставляется извлекать ихъ изъ числовыхъ примѣровъ, описаніе которыхъ, къ тому же, темно и неточно. Общее впечатлѣніе таково, что римскіе громатики кажутся какъ бы на тысячу лѣтъ старше греческой геометріи; можно было бы думать, что тѣхъ и другихъ раздѣляетъ потопъ" [1]). Нѣкоторыя изъ своихъ правилъ римляне, вѣроятно, унаслѣдовали отъ этрусковъ, другія же совпадаютъ съ правилами Герона. Среди послѣднихъ находится правило нахожденія площади треугольника по тремъ сторонамъ („Геронова формула") и приближенное выраженіе $\frac{13}{30}a^2$ для площади равносторонняго треугольника (гдѣ a одна изъ сторонъ). Но эта площадь равносторонняго треугольника вычислялась также по формуламъ $\frac{1}{2}(a^2+a)$ и $\frac{1}{2}a^2$, первая изъ которыхъ была неизвѣстна Герону. По всей вѣроятности, выраженіе $\frac{1}{2}a^2$ было заимствовано у египтянъ. Болѣе изящные и утонченные методы Герона остались неизвѣстными римлянамъ. Громатики иногда считали достаточно точнымъ измѣреніе площадей городовъ съ неправильными очертаніями, основанное исключительно на измѣреніи ихъ периметровъ [2]). Египетская геометрія, по крайней мѣрѣ настолько, насколько римляне считали ее полезной для себя, была ввезена въ Римъ во времена Юлія Цезаря, который приказалъ произвести генеральное межеваніе всего государства съ цѣлью установить правильную систему взиманія податей. Съ древнѣйшихъ временъ у римлянъ существовалъ обычай дѣлить

[1]) *Hankel*, pp. 295, 296. Подробный отчетъ объ *agrimensores*, см. у *Кантора*, I, pp. 485–551.

[2]) *Hankel*, p. 297.

землю на прямоугольные и прямолинейные участки. Стѣны и улицы были параллельны и окружали квадратные участки, имѣвшіе предписанные размѣры. Этотъ обычай чрезвычайно упрощалъ все дѣло и значительно уменьшалъ размѣры необходимыхъ геометрическихъ свѣдѣній. Приближенныя формулы вполнѣ удовлетворяли всѣмъ обыкновеннымъ требованіямъ точности.

Цезарь предпринялъ реформу календаря, для чего воспользовался также наукой, заимствованной изъ Египта. Эту работу онъ поручилъ исполнить александрійскому астроному *Созигену*. Среди римскихъ писателей по геометріи, или по землемѣрію, можно назвать слѣдующихъ: *Marcus Terentius Varro* (около 116—27 г. до Р. Х.), *Sextus Julius Frontinus* (въ 70 г. по Р. Х. былъ преторомъ въ Римѣ), *Martianus Mineus Felix Capella* (родился въ Карѳагенѣ въ первые годы пятаго столѣтія), *Magnus Aurelius Cassiodorius* (родился около 475 г. по Р. Х.). Неизмѣримо выше всѣхъ ихъ стояли греческіе геометры періода упадка греческой учености. Замѣчателенъ тотъ фактъ, что именно въ періодъ политическаго униженія, отмѣченнаго паденіемъ Западной Римской Имперіи и возвышеніемъ остготовъ, началось въ Италіи изученіе греческой науки. Написанныя въ это время компиляціи имѣютъ много недостатковъ, но онѣ интересны благодаря тому обстоятельству, что служили единственными источниками математическихъ знаній на западѣ вплоть до двѣнадцатаго вѣка. Среди писателей такихъ компиляцій первое мѣсто занимаетъ *Anicius Manlius Severinus Boethius* (480?—524). Сначала онъ былъ любимцемъ царя Ѳеодориха, но потомъ былъ обвиненъ въ измѣнѣ, заключенъ въ тюрьму и, наконецъ, обезглавленъ. Въ темницѣ онъ написалъ *Объ утѣшеніяхъ философіи*. Боэтій написалъ сочиненіе *Institutio Arithmetica* (представляющее, въ сущности, переводъ ариѳметики Никомаха) и *Геометрію*. Первая книга его *Геометріи* представляетъ извлеченіе изъ первыхъ трехъ книгъ Евклидовыхъ *Началъ*, безъ доказательствъ. Повидимому, Боэтій и много другихъ писателей послѣ него пришли какимъ-то образомъ къ тому убѣжденію, что только однѣ теоремы принадлежали Евклиду, доказательства же были вставлены

Ѳеономъ; этимъ объясняется странный фактъ отсутствія какого бы то ни было доказательства. Вторая книга *Геометріи* Боэтія представляетъ собою сокращеніе практической геометріи Фронтина, наиболѣе выдающагося изъ громатиковъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что, подражая Никомаху, Боэтій раздѣляетъ математическія науки на четыре отдѣла, Ариѳметику, Музыку, Геометрію, Астрономію. Онъ впервые обозначилъ это раздѣленіе словомъ *quadruvium* (четыре пути). Употребленіе этого термина широко распространилось въ средніе вѣка. Кассіодорій пользовался подобнымъ же образнымъ выраженіемъ—четверо вратъ науки. Исидоръ Карѳагенскій (родившійся въ 570 г.) въ своемъ сочиненіи *Origines* насчитываетъ семь наукъ,—четыре, входящія въ *quaaruvium* и три (Грамматика, Реторика, Логика), составляющія *trivium* (три пути).

СРЕДНІЕ ВѢКА.

Ариѳметика и Алгебра.

Индусы.

Вскорѣ послѣ того, какъ наступило время упадка греческой математической науки, другая арійская раса—индусы—стала обнаруживать блестящія математическія способности. Не въ области геометріи прославились они, но въ области ариѳметики и алгебры. Въ геометріи они были даже слабѣе, чѣмъ греки въ алгебрѣ. Замѣтныхъ успѣховъ достигли они въ области неопредѣленнаго анализа (о чемъ не мѣсто говорить въ нашей исторіи), но въ этомъ отношеніи они не оказали никакого вліянія на европейскихъ ученыхъ по той причинѣ, что ихъ изслѣдованія сдѣлались извѣстными на Западѣ лишь въ началѣ девятнадцатаго вѣка.

Въ Индіи не было математиковъ по профессіи; писатели, о которыхъ мы собираемся говорить, считали себя астрономами. Для нихъ математика была только служанкой астрономіи. Въ виду этого любопытно замѣтить, что, въ концѣ концовъ, вспомогательная наука оказалась единственной, въ области которой они дѣйствительно прославились, тогда какъ въ своемъ любимомъ занятіи—астрономіи—они выказали неспособность къ наблюденіямъ, къ собиранію фактовъ и къ индуктивнымъ изслѣдованіямъ.

Непріятною чертою дошедшихъ до насъ индусскихъ математическихъ сочиненій является то, что они написаны въ стихахъ и выражены темнымъ мистическимъ языкомъ. Тому, кто уже выучилъ излагаемый предметъ, стихи эти могутъ служить для облегченія памяти, непосвященному

же они часто непонятны. Обыкновенно доказательствъ нѣтъ, или, по крайней мѣрѣ, они не сохранились, хотя индусскіе математики, несомнѣнно, дошли до большинства своихъ открытій посредствомъ логическихъ выводовъ.

Нѣкоторыя части индусской математики, безъ сомнѣнія, имѣютъ греческое происхожденіе. Прослѣдить связь между индусской и греческой мыслью—интересная, но трудная задача. Послѣ того, какъ Египетъ сталъ римской провинціей, между Индіей и Александріей установились обширныя коммерческія сношенія. Несомнѣнно, происходилъ и значительный обмѣнъ философскихъ и научныхъ знаній. Мы предполагаемъ, что въ алгебрѣ и съ той и съ другой стороны были спросъ и предложеніе.

Въ настоящее время мы знаемъ очень мало о развитіи индусской математики. Тѣ немногія сочиненія, которыя дошли до насъ, представляютъ индусскую науку только въ ея законченномъ видѣ. Времена, къ которымъ относятся важнѣйшія изъ этихъ сочиненій, кромѣ перваго, хорошо опредѣлены. Въ 1881 г. найдена была зарытой въ землѣ въ Бахшали, въ сѣверозападной Индіи, безыменная ариѳметика, которая, какъ предполагаютъ по особенностямъ стиховъ, принадлежитъ къ третьему или четвертому вѣку по Р. Х. Найденный памятникъ написанъ на березовой корѣ и представляетъ собою неполный списокъ, сдѣланный съ болѣе древней рукописи, вѣроятно, приблизительно въ восьмомъ столѣтіи [1]).

Древнѣйшимъ изъ извѣстныхъ намъ индусскихъ астрономовъ былъ *Арьябхатта*, родившійся въ 476 г. по Р. Х. въ Паталипутрѣ, на верхнемъ Гангѣ. Онъ авторъ знаменитаго сочиненія, озаглавленнаго *Арьябхаттіямъ*, третья глава котораго посвящена математикѣ [2]). Около ста лѣтъ послѣ него жилъ *Брахмагупта*, родившійся въ 598 г. и написавшій въ 628 г. сочиненіе *Брахма—спхута-сиддханта* („Пересмотрѣнная система Брахмы“), двѣнадцатая и восемнадцатая

[1]) *Cantor*, I, pp. 558, 574–575. См. также The Bakhshâlî Manuscript, edited by *Rudolf Hoernle* въ Indian Antiquary, XVII, 33—48 и 275—279, Bombay, 1888.

[2]) Переведено *L. Rodet* въ Journal Asiatique, 1879, série 7, T. XIII.

главы котораго принадлежатъ математикѣ [1]). Въ слѣдующіе вѣка встрѣчаемъ мы только двухъ замѣчательныхъ ученыхъ: это *Сридхара*, написавшій сочиненіе *Ганита-сара* („Сущность вычисленія"), и *Падманабха*, авторъ руководства къ алгебрѣ. Наука сдѣлала, повидимому, мало успѣховъ со времени Брахмагупты: сочиненіе, озаглавленное *Сиддхантасиромани* („Вѣнецъ астрономической системы") и написанное ученымъ *Бхаскара Ачарья* въ 1150 г., стоитъ немногимъ выше, чѣмъ книга *Сиддханта* Брахмагупты, написанная болѣе, чѣмъ на пятьсотъ лѣтъ раньше. Двумя наиболѣе важными математическими главами въ сочиненіи Бхаскары являются *Лилавати* („прекрасная", т. е. благородная наука), и *Виджа-ганита* („извлеченіе корней"), посвященныя ариѳметикѣ и алгебрѣ. Съ этого времени духъ изслѣдованія угасъ, и великія имена перестали появляться въ исторіи индусской науки.

Въ другомъ мѣстѣ мы говорили о томъ, что индусы открыли принципъ помѣстнаго значенія и нуля въ ариѳметическомъ обозначеніи. Теперь мы опишемъ индусскіе методы вычисленія, доведенные въ Индіи до совершенства, о которомъ и не мечтали другіе, жившіе раньше, народы. Свѣдѣнія объ этомъ, дошедшія до насъ, заимствованы отчасти изъ индусскихъ сочиненій, но, главнымъ образомъ, изъ ариѳметики, написанной греческимъ монахомъ *Максимомъ Планудомъ*, который жилъ въ первой половинѣ четырнадцатаго столѣтія и который, по собственному его признанію, пользовался индусскими источниками.

Чтобы понять, почему были приняты извѣстные способы вычисленія, мы должны помнить, какими приборами распо-

---

[1]) Переведено на англійскій языкъ *Г. Т. Кольбрукомъ*, London, 1817. Этотъ знаменитый санскритологъ перевелъ также математическія главы изъ *Сиддхантасиромани* Бхаскары. Кольбрукъ служилъ въ Индіи въ качествѣ судьи и около 1794 года сталъ заниматься Санскритомъ, чтобы быть въ состояніи читать книги индусскихъ законовъ. Будучи съ юныхъ лѣтъ любителемъ математики, онъ началъ изучать также индусскую астрономію и математику, и, наконецъ, своими переводами онъ доказалъ Европѣ тотъ фактъ, что индусы въ предшествующіе вѣка сдѣлали замѣчательныя открытія, изъ которыхъ нѣкоторыя ошибочно приписывались арабамъ.

лагали индусы при производствѣ письменныхъ вычисленій. „Они писали тростниковымъ перомъ по небольшой черной доскѣ очень жидкой бѣлой краской, которая оставляла знаки, легко стиравшіеся, или на бѣлой дощечкѣ, меньше квадратнаго фута, посыпанной красной мукой, на которой они писали знаки маленькой палочкой, такъ что появлялись бѣлые знаки на красномъ полѣ“.[1]) Чтобы знаки эти можно было прочесть, они должны были быть написаны крупно, вслѣдствіе чего явилась необходимость придумывать средства для сбереженія мѣста. Этого достигали, уничтожая знакъ, какъ только онъ становился ненужнымъ для дальнѣйшаго вычисленія. Индусы склонны были и при вычисленіяхъ, какъ и при обыкновенномъ письмѣ, идти слѣва направо. Такъ, при сложеніи 254 и 663 они говорили бы: $2+6=8$, $5+6=11$, что превращаетъ 8 въ 9, $4+3=7$. Откуда получается сумма 917.

При *вычитанія*, когда приходилось „занимать“, они пользовались двумя методами. Такъ, при вычитаніи 28 изъ 51 они говорили бы: 8 изъ $11=3$, 2 изъ $4=2$; или: 8 изъ $11=3$, 3 изъ $5=2$.

Для *умноженія* индусы пользовались нѣсколькими методами. Иногда они разлагали множителя на его дѣлителей и затѣмъ умножали послѣдовательно на каждаго дѣлителя. Въ другихъ случаяхъ они представляли множителя въ видѣ суммы или разности такихъ двухъ чиселъ, на которыя было легко умножать. При письменной работѣ умноженіе, напримѣръ, 5×57893411 производилось слѣдующимъ образомъ: $5\times5=25$, что и записывали надъ множимымъ*); $5\times7=35$; прибавляя 3 къ 25, получаемъ 28; сотремъ 5 и на его мѣстѣ напишемъ 8. Получимъ 285. Затѣмъ, $5\times8=40$; $4+5=9$; вмѣсто 5 ставимъ 9, получаемъ 2890, и т. д. Въ концѣ дѣйствія на таблицѣ появлялась запись такого рода:

$$\begin{array}{ll} 289467055 & \\ 57893411 & \quad 5 \end{array}$$

---

[1]) *Hankel*, p. 186.

*) Англичане, какъ, вѣроятно, уже замѣтилъ читатель, пишутъ множителя на первомъ мѣстѣ слѣва, а множимое на второмъ.

Прим. ред.

Когда множитель состоялъ изъ нѣсколькихъ цифръ, тогда индусское дѣйствіе, по описанію Ганкеля (p. 188), въ случаѣ 324×753, было таково. Помѣстимъ лѣвую цифру множителя

2259 324 надъ цифрой единицъ множимаго; $3 \times 7 = 21$,
324 что и запишемъ; $3 \times 5 = 15$; вмѣсто 21 пишемъ 22;
753 $3 \times 3 = 9$. Въ этотъ моментъ вычисленія на таблицѣ появляется запись, которая здѣсь приведена. Затѣмъ множимое передвигается на одно мѣсто вправо; $2 \times 7 = 14$; на томъ мѣстѣ, гдѣ должно стоять 14, записано уже 25; вмѣстѣ эти числа составляютъ 39, что мы и пишемъ

24096 вмѣсто 25; $2 \times 5 = 10$; прибавимъ 10 къ 399 и
324 напишемъ 409 вмѣсто 399; $2 \times 3 = 6$. Прилагаемая
753 фигура показываетъ состояніе записи въ этотъ моментъ. Мы начнемъ третій шагъ въ вычисленіи, передвигая множимое направо на одно мѣсто; $4 \times 7 = 28$; прибавимъ это къ 09 и запишемъ вмѣсто этихъ цифръ 37 и т. д.

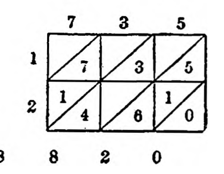
243972 Этотъ методъ, которымъ индусы пользуются даже
324 въ настоящее время, замѣчательно сберегаетъ
753 мѣсто, такъ какъ только немногія изъ всѣхъ входящихъ въ вычисленіе цифръ появляются на дощечкѣ въ каждый данный моментъ. Поэтому методъ этотъ былъ хорошо приспособленъ къ ихъ небольшимъ дощечкамъ и грубымъ карандашамъ. Если вычисленіе производится на бумагѣ, то методъ оказывается плохимъ (1) потому, что мы не можемъ легко и чисто стирать цифры, и (2) потому, что, имѣя въ своемъ распоряженіи много бумаги, было бы безуміемъ сберегать мѣсто и тѣмъ по необходимости усложнять процессъ вычисленія, присчитывая каждое частное произведеніе тотчасъ послѣ его полученія. Тѣмъ не менѣе, оказывается, что ранніе арабскіе писатели, не сумѣвшіе усовершенствовать индусскій способъ вычисленія, приняли его безъ измѣненія и показали, какъ пользоваться имъ при производствѣ вычисленій на бумагѣ, а именно, вычеркивая цифры (вмѣсто того, чтобы стирать ихъ) и надписывая новыя цифры надъ старыми[1]).

Кромѣ этихъ, у индусовъ были и другіе методы, болѣе близко напоминающіе процессы вычисленія, употребля-

---

[1]) *Hankel,* p. 188.

емые въ наше время. Такъ, счетную дощечку дѣлили на квадраты, какъ шахматную доску. Проводили діагонали. На приводимомъ чертежѣ показано, какъ производилось умноженіе 12×735=8820[1]). Существующія рукописи не даютъ намъ подробныхъ свѣдѣній о томъ, какъ индусы производили *дѣленіе.* Повидимому, они отнимали частныя произведенія отъ дѣлимаго, стирая цифры дѣлимаго и замѣняя ихъ новыми цифрами, получаемыми при вычитаніи. Этимъ достигалось сбереженіе мѣста такъ же, какъ и при умноженіи.



Индусы придумали остроумный, хотя и неубѣдительный, способъ повѣрки своихъ вычисленій. Онъ основанъ на той теоремѣ, что остатокъ отъ дѣленія суммы цифръ какого-нибудь числа на 9 тотъ же, что остатокъ отъ дѣленія на 9 самого числа. Способъ „выбрасыванія девятокъ“ былъ болѣе полезенъ индусамъ, чѣмъ намъ. Обычай стирать цифры и писать другія на ихъ мѣстѣ дѣлалъ для нихъ гораздо болѣе труднымъ повѣрку результатовъ посредствомъ пересмотра сдѣланныхъ вычисленій. Къ концу умноженія большое число цифръ, полученныхъ при производствѣ вычисленій, оказывалось стертымъ. Поэтому и былъ для нихъ полезнымъ способъ повѣрки, не требовавшій пересмотра промежуточныхъ вычисленій.

Въ дошедшихъ до насъ отрывкахъ *Бахшалійской ариѳметики* предполагается знаніе процессовъ вычисленія. При изображеніи дробей числитель пишется надъ знаменателемъ безъ раздѣляющей ихъ черты. Цѣлыя числа пишутся, какъ дроби со знаменателемъ 1. Въ смѣшанныхъ числахъ цѣлая часть пишется надъ дробью. Такъ, $\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix} = 1\frac{1}{3}$. На мѣсто нашего знака равенства = индусы пользовались словомъ *пхаламъ*, въ сокращеніи *пха.* Сложеніе обозначалось словомъ *йу*, сокращеніемъ слова *йута.* Складываемыя числа часто заключались въ прямоугольникъ. Такъ, *пха* 12 $\boxed{\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\ \begin{matrix}7\\1\end{matrix}\ \text{йу}}$ озна-

[1]) *Cantor,* I, p. 571.

чаетъ: $\frac{5}{1}+\frac{7}{1}=12$. Неизвѣстное количество называется *сунья* и обозначается жирной точкой •. Слово „сунья“ значитъ „пустой“ и служитъ также для выраженія нуля, который тоже обозначается точкой. Это двойное употребленіе слова и точки основывалось на томъ представленіи, что мѣсто остается „пустымъ“, если оно не заполнено. Его нужно разсматривать, какъ пустое, пока неизвѣстно число, которое слѣдуетъ поставить на это мѣсто[1]).

Въ Бахшалійской ариѳметикѣ есть задачи и, между прочимъ, такія, которыя рѣшены приведеніемъ къ единицѣ или своего рода *ложнымъ положеніемъ*. Примѣръ: B даетъ вдвое больше, чѣмъ A; C—втрое больше, чѣмъ B, D — вчетверо больше, чѣмъ C; всѣ вмѣстѣ даютъ 132; сколько далъ A? Положимъ, что неизвѣстное *(сунья)* есть 1, тогда $A=1$, $B=2$, $C=6$, $D=24$, сумма ихъ $=33$. Раздѣлимъ 132 на 33; частное отъ этого дѣленія представляетъ то число, которое далъ A.

Методъ *ложнаго положенія* мы встрѣчали и раньше, у древнихъ египтянъ. Примѣняя этотъ способъ рѣшенія задачъ, египтяне руководились инстинктомъ; у индусовъ способъ этотъ превратился въ сознательный методъ. Бхаскара тоже пользуется этимъ методомъ; но тогда какъ авторъ Бахшалійской ариѳметики пользуется обыкновенно единицей, какъ ложнымъ значеніемъ неизвѣстнаго, Бхаскара предпочитаетъ число 3. Такъ, если нѣкоторое число умножить на пять, отъ произведенія отнять его треть, остатокъ раздѣлить на 10 и прибавить къ этому $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ первоначальнаго числа, то получится 68. Какъ велико это число? Положимъ, что число это равно 3; тогда получаемъ соотвѣтственно 15, 10, 1, и $1+\frac{3}{3}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{17}{4}$. Слѣдовательно, $(68 \div \frac{17}{4})\,3=48$ есть искомое число[2]).

Любимымъ методомъ рѣшенія задачъ служила *инверсія*. Съ лаконическою краткостью Арьябхатта такъ описываетъ этотъ методъ: „Умноженіе становится дѣленіемъ, дѣленіе становится умноженіемъ; прибыль обращается въ убытокъ, убытокъ въ прибыль; инверсія“. Совершенно въ другомъ

[1]) *Cantor*, I, pp. 573—575.

[2]) *Cantor*, I, p. 578.

стилѣ изложена слѣдующая задача Бхаскары, иллюстрирующая этотъ методъ: „Прекрасная дѣва съ блестящими очами, скажи мнѣ, ты, которая знаешь, какъ правильно примѣнять методъ инверсіи, какъ велико число, которое, будучи умножено на 3, затѣмъ увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведенія, раздѣлено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$ частнаго, умножено само на себя, уменьшено на 52, послѣ извлеченія квадратнаго корня, прибавленія 8 и дѣленія на 10, даетъ число 2?“ Процессъ рѣшенія задачи состоитъ въ томъ, что, начиная съ числа 2, производятъ обратныя дѣйствія въ обратномъ порядкѣ. Такъ, $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$, $\sqrt{196}=14$; $14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} \div 3 = 28$; это число и есть искомое[1]). Вотъ другой примѣръ, также заимствованный изъ *Лилавати:* „Пчелы, въ числѣ, равномъ корню квадратному изъ половины роя, слетѣли на кустъ жасмина, $\frac{8}{9}$ всего роя осталось позади; одна пчела-самка летаетъ вокругъ цвѣтка лотоса; тамъ жужжитъ неосторожный самецъ, привлеченный ночью сладкимъ запахомъ цвѣтка и теперь заключенный внутри его. Скажи мнѣ число пчелъ“ [2]). Отвѣтъ 72. Эта пріятная поэтическая форма, въ которую облечены ариѳметическія задачи, находится въ связи съ существовавшимъ у индусовъ обычаемъ писать всѣ школьныя руководства въ стихахъ и, въ особенности, съ тѣмъ фактомъ, что задачи эти, предлагаемыя въ видѣ загадокъ, были однимъ изъ любимыхъ общественныхъ развлеченій индусовъ. Брахмагупта говоритъ: „Эти задачи предлагаются просто для забавы; мудрый человѣкъ можетъ придумать тысячу другихъ, или можетъ рѣшать задачи, заданныя ему другими, по изложеннымъ здѣсь правиламъ. Какъ солнце затмеваетъ звѣзды своимъ блескомъ, такъ и ученый человѣкъ можетъ затмить славу другихъ въ народныхъ собраніяхъ, предлагая алгебрическія задачи и, тѣмъ болѣе, рѣшая ихъ“.

Индусы хорошо знали тройное правило вмѣстѣ съ вычисленіемъ процентовъ (простыхъ и сложныхъ), правиломъ смѣшенія, задачей о бассейнѣ, или о трубахъ, и съ суммованіемъ ариѳметической и геометрической прогрессій. Арьябхатта примѣняетъ тройное правило къ рѣшенію такой

[1]) *Cantor,* I, p. 577.

[2]) *Hankel,* p. 191.

задачи — 16 лѣтняя дѣвушка-рабыня стóитъ 32 нишка, чтó стóитъ 20 лѣтняя рабыня? — и говоритъ, что задачу эту слѣдуетъ рѣшать съ помощью обратной пропорцiи, такъ какъ „стоимость живыхъ существъ (рабовъ и скота) устанавливается сообразно ихъ возрасту“ — чѣмъ старѣе, тѣмъ дешевле [1]). Извлеченiе квадратнаго и кубическаго корней было также хорошо знакомо индусамъ. Оно производилось съ помощью формулъ:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Индусы сдѣлали замѣчательные вклады въ алгебру. Сложенiе обозначалось просто тѣмъ, что слагаемыя ставились рядомъ, какъ въ Дiофантовой алгебрѣ; вычитанiе означалось точкой, поставленной надъ вычитаемымъ; умноженiе тѣмъ, что послѣ сомножителей ставили слогъ *бха*, сокращенiе слова *бхавита* — „произведенiе“; дѣленiе тѣмъ, что дѣлитель ставили подъ дѣлимымъ; квадратный корень тѣмъ, что писали слогъ *ка*—отъ слова *карана* (ирращiональный)—передъ даннымъ количествомъ. Неизвѣстное количество называлось у Брахмагупты *йâваттâватъ*. Въ случаѣ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ, въ противность обычаю Дiофанта, каждое изъ нихъ снабжалось особымъ названiемъ и особымъ символомъ. Неизвѣстнымъ количествомъ, слѣдовавшимъ за первымъ, придавались названiя красокъ, — ихъ называли чернымъ, синимъ, желтымъ, краснымъ, или зеленымъ неизвѣстными. Начальные слоги соотвѣтствующихъ словъ служили символами неизвѣстныхъ. Такъ *йâ* означало x; *кâ* (отъ *кâлака* = черный) означало y, *йâ кâ бха*—„x разъ y“, *ка* 15 *ка* 10 — „$\sqrt{15}+\sqrt{10}$.“

Индусы первые признали существованiе отрицательныхъ чиселъ (разсматриваемыхъ отвлеченно, безъ уменьшаемаго) и чиселъ ирращiональныхъ. Различiе между числами, снабженными знаками + и —, они объясняли, представляя себѣ первыя изъ этихъ чиселъ, какъ „имущества“, вторыя, какъ „долги“, или заставляя ихъ выражать противуположныя направленiя. Они сдѣлали большой шагъ впередъ по сравненiю съ тѣмъ, чего достигъ Дiофантъ, признавъ су-

---

[1]) *Cantor*, I, p. 578.

ществованіе двухъ рѣшеній въ квадратныхъ уравненіяхъ. Такъ, Бхаскара даетъ рѣшеніе $x=50$ или -5 для уравненія $x^2-45x=250$. „Но", говоритъ онъ, „второго значенія въ данномъ случаѣ брать не слѣдуетъ, такъ какъ оно не соотвѣтствуетъ условію задачи; люди не одобряютъ отвлеченныхъ отрицательныхъ чиселъ" *). Такимъ образомъ, индусы видѣли отрицательные корни, но не допускали ихъ. Въ индусскомъ способѣ рѣшенія квадратныхъ уравненій, находимомъ у Брахмагупты и Бхаскары, можно, какъ полагаютъ, замѣтить греческіе пріемы. Такъ, напримѣръ, въ ихъ сочиненіяхъ, какъ и у Герона Александрійскаго, уравненіе $ax^2+bx=c$ рѣшается по правилу, приводящему къ формулѣ

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}.$$

Это правило было усовершенствовано Сридхарой, который начинаетъ съ умноженія членовъ уравненія не на a, какъ дѣлали его предшественники, а на $4a$, благодаря чему исключается возможность появленія дробей подъ радикаломъ. Онъ получаетъ такимъ образомъ

$$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}.$$

Наиболѣе важнымъ успѣхомъ въ теоріи полныхъ квадратныхъ уравненій, достигнутымъ въ Индіи, слѣдуетъ считать объединеніе въ одномъ правилѣ трехъ случаевъ:

$$ax^2+bx=c,\ bx+c=ax^2,\ ax^2+c=bx.$$

Діофантъ, повидимому, разсматривалъ эти случаи отдѣльно, потому что онъ не настолько привыкъ къ обращенію съ отрицательными числами [1]).

Значительно дальше грековъ и даже дальше Брахмагупты пошелъ Бхаскара въ своемъ утвержденіи, что „квадратъ положительнаго числа, а равно и квадратъ отрицательнаго числа, оба положительны; что квадратный корень изъ

*) Ср. *Colebrooke*, Vija-Ganita, 140, Algebra of Br. & Bh. 217.

Прим. ред.

[1]) *Cantor*, I, p. 585.

положительнаго числа двойной, положительный и отрицательный, и что квадратнаго корня изъ отрицательнагочисла не существуетъ, такъ какъ такое число не можетъ быть квадратомъ".

Мы видѣли, что греки проводили рѣзкое различіе между числами и величинами, что ирраціональное количество они не признавали числомъ. Открытіе существованія ирраціональныхъ количествъ было однимъ изъ глубочайшихъ открытій, которыми мы обязаны имъ. Индусы не замѣчали различія между раціональными и ирраціональными количествами; во всякомъ случаѣ, они на него не обращали вниманія. Они переходили отъ одного къ другому, не думая о глубокой безднѣ, отдѣляющей непрерывное отъ прерывнаго. Ирраціональныя количества подвергались тѣмъ же дѣйствіямъ, что и обыкновенныя числа; индусы разсматривали ихъ, какъ настоящія числа. Поступая такъ, они въ большой мѣрѣ содѣйствовали *прогрессу* математики: они допускали результаты, къ которымъ приходили инстинктивно; достиженіе тѣхъ же результатовъ путемъ строгихъ логическихъ процессовъ потребовало бы значительно бо̀льшихъ усилій. Ганкель говоритъ (р. 195): „если разумѣть подъ алгеброй приложеніе ариѳметическихъ операцій къ сложнымъ величинамъ всякаго рода, будутъ ли то раціональныя, или ирраціональныя числа, или пространственныя величины, то ученыхъ браминовъ Индостана слѣдуетъ считать истинными изобрѣтателями алгебры".

У Бхаскары мы находимъ два замѣчательныхъ тождества, одно изъ которыхъ дано почти во всѣхъ нашихъ школьныхъ руководствахъ по алгебрѣ и показываетъ, какъ найти квадратный корень изъ „двучленнаго ирраціональнаго выраженія". То, что Евклидъ въ X книгѣ выразилъ отвлеченнымъ языкомъ, труднымъ для пониманія, становится здѣсь яснымъ съ перваго взгляда въ алгебрической формѣ и въ приложеніи къ числамъ: [1])

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

---

[1]) *Hankel*, p. 194.

Арабы.

Арабы представляютъ необычайное зрѣлище въ исторіи цивилизаціи. Неизвѣстныя, невѣжественныя племена, разсѣянныя по Аравійскому полуострову, не пріученные ни къ государственному управленію ни къ войнѣ, въ теченіе десяти лѣтъ, въ горнилѣ религіознаго энтузіазма, сплавились въ могущественный народъ, который въ одно столѣтіе распространилъ свои владѣнія отъ Индіи черезъ сѣверную Африку до самой Испаніи. Черезъ сто лѣтъ послѣ этого величественнаго побѣднаго шествія мы видимъ ихъ вождями умственнаго движенія; мусульмане сдѣлались великими учеными своего времени.

Около 150 лѣтъ послѣ бѣгства Могамета изъ Мекки въ Медину началось изученіе индусской науки въ Багдадѣ при дворѣ калифа Альмансура. Въ 773 г. по Р. Х. появился при его дворѣ индусскій астрономъ съ астрономическими таблицами, которыя по царскому приказу были переведены на арабскій языкъ. Эти таблицы, извѣстныя у арабовъ подъ названіемъ *Синдхиндъ* и заимствованныя, вѣроятно, изъ *Сиддханты* Брахмагупты, пользовались большимъ авторитетомъ. Съ этими таблицами и перешли, вѣроятно, къ арабамъ индусскіе числовые знаки. Кромѣ путешествій Альбируни, у насъ нѣтъ никакихъ другихъ свидѣтельствъ о сношеніяхъ арабскихъ ученыхъ съ индусскими; насъ не удивило бы однако, если бы дальнѣйшія историческія изслѣдованія обнаружили еще болѣе тѣсныя сношенія. Больше извѣстно намъ о томъ, какъ арабы познакомились съ греческой наукой. Въ другомъ мѣстѣ мы будемъ говорить о геометріи и тригонометріи. *Абу'ль Уафа* (940—998) перевелъ трактатъ по алгебрѣ Діофанта, одного изъ послѣднихъ греческихъ авторовъ, изданныхъ по арабски. Евклидъ, Аполлоній и

Птолемей стали достоянiемъ арабскихъ ученыхъ въ Багдадѣ почти на два столѣтiя раньше.

Изъ всѣхъ арабскихъ сочиненiй по ариѳметикѣ, извѣстныхъ намъ, первое мѣсто по времени и по исторической важности занимаетъ сочиненiе *Мухаммеда ибнъ Му̂са̂ Альхуаризми̂,* который жилъ въ царствованiе калифа Аль Маму̂на (813—833). Какъ и всѣ арабскiе математики, о которыхъ мы упомянемъ, онъ былъ прежде всего астрономомъ; у арабовъ, какъ и у индусовъ, чисто математическiе интересы имѣли второстепенное значенiе. Прежде полагали, что ариѳметика Альхуаризми̂ утеряна, но въ 1857 г. въ библiотекѣ Кэмбриджскаго университета былъ найденъ латинскiй переводъ ея, сдѣланный, вѣроятно, Ателардомъ изъ Бата [1]). Ариѳметика эта начинается словами: „Сказалъ Альгоритми. Воздадимъ должную хвалу Богу, нашему вождю и защитнику". Тутъ имя автора—*Альхуаризми̂*—перешло въ *Альгоритми*, откуда и происходитъ наше современное слово *алгориѳмъ*, означающее искусство вычислять опредѣленнымъ образомъ. Альхуаризми̂ хорошо знакомъ съ принципомъ помѣстнаго значенiя и индусскими процессами вычисленiя. По словамъ одного арабскаго писателя, его ариѳметика „превосходитъ всѣ другiя по краткости и легкости и доказываетъ смышленность и остроумiе индусовъ въ величайшихъ открытiяхъ". [2]) Какъ при *сложенiи*, такъ и при *вычитанiи* Альхуаризми̂ производитъ дѣйствiе слѣва направо, но въ вычитанiи, странно сказать, онъ не объясняетъ, какъ поступать въ тѣхъ случаяхъ, когда бо́льшую цифру нужно вычитать изъ меньшей. Его *умноженiе* представляетъ собою одинъ изъ индусскихъ процессовъ, видоизмѣненный соотвѣтствующимъ образомъ для работы на бумагѣ: каждое частное произведенiе пишется *надъ* соотвѣтствующей цифрой множимаго; цифры не стираются, какъ у индусовъ, а зачеркиваются. Процессъ *дѣленiя* основанъ на томъ же принципѣ. Дѣлитель

---

[1]) Сочиненiе это было найдено княземъ *B. Boncompagni* подъ заглавiемъ „Algoritmi de numero Indorum". Онъ издалъ это сочиненiе въ книгѣ Trattati d'Aritmetica, Roma, 1857.

[2]) *Cantor*. I, 670; *Hankel,* p. 256.

136
24
110
22
140
143
46468
324
324
324

пишется подъ дѣлимымъ, частное—надъ нимъ. Измѣненія въ дѣлимомъ, происходящія отъ вычитанія неполныхъ произведеній, пишутся надъ частнымъ. При каждомъ новомъ шагѣ въ производствѣ дѣленія дѣлитель передвигается на одно мѣсто вправо. Авторъ даетъ пространное описаніе этого процесса въ случаѣ $46468 \div 324 = 143\frac{136}{324}$; приводимый здѣсь образецъ рѣшенія по этому способу данъ Канторомъ[1]). Этимъ способомъ дѣленія пользовались почти исключительно ранніе европейскіе писатели, слѣдовавшіе арабскимъ образцамъ; способъ этотъ не исчезъ еще въ Европѣ въ восемнадцатомъ вѣкѣ[2]). Позднѣйшіе арабскіе писатели видоизмѣнили способъ Альхуаризмî и такимъ образомъ подошли ближе къ тѣмъ способамъ, которые преобладаютъ въ настоящее время. Альхуаризмî разъясняетъ подробно употребленіе шестидесятичныхъ дробей.

Арабскія ариѳметики обыкновенно содержали объясненіе, кромѣ четырехъ главныхъ дѣйствій, еще и процесса „выбрасыванія 9-къ" (называемаго иногда „индусской повѣркой"), правила „ложнаго положенія", правила „двойного положенія", квадратнаго и кубическаго корня и дробей (которыя писались безъ черты, отдѣляющей числителя отъ знаменателя, какъ у индусовъ). Тройное правило также встрѣчается въ арабскихъ сочиненіяхъ, иногда въ руководствахъ по алгебрѣ. Замѣчателенъ тотъ фактъ, что у раннихъ арабовъ нельзя открыть никакихъ слѣдовъ употребленія абака. Къ концу тринадцатаго столѣтія встрѣчаемъ мы въ первый разъ арабскаго писателя *Ибнъ Альбаннâ*, который пользуется процессами, представляющими смѣшеніе вычисленій съ помощью абака и индусскихъ пріемовъ вычисленія. Ибнъ Альбаннâ жилъ въ Буджіи, приморскомъ городѣ сѣверной Африки; ясно, что тамъ онъ подпалъ

---

[1]) *Cantor,* I, 674. Мы объяснимъ подробнѣе этотъ способъ дѣленія, когда будемъ говорить о Пачіоли.

[2]) *Hankel,* p. 258.

подъ вліяніе европейской науки и ознакомился со счетной доской [1]).

Достоинъ вниманія тотъ фактъ, что съ теченіемъ времени восточные арабы, какъ въ ариѳметикѣ, такъ и въ алгебрѣ стали все болѣе и болѣе удаляться отъ индусскихъ ученій и все больше подпадать подъ вліяніе греческой науки. Объ этомъ слѣдуетъ пожалѣть, такъ какъ въ алгебрѣ и ариѳметикѣ индусовъ были новыя идеи, пренебрегая которыми арабы сами закрывали себѣ путь къ прогрессу. Такъ, *Аль Кархî* изъ Багдада, жившій въ началѣ одиннадцатаго вѣка, написалъ ариѳметику, изъ которой исключены индусскіе числовые знаки! Всѣ числа въ текстѣ этой книги написаны полностью словами. Въ другихъ отношеніяхъ книга эта написана почти цѣликомъ по образцу греческихъ сочиненій такого же рода. Другой выдающійся и талантливый писатель, *Абу'ль Уафâ*, во второй половинѣ десятаго столѣтія написалъ ариѳметику, въ которой тоже нѣтъ индусскихъ цифръ. Вопросъ о томъ, почему столь выдающіеся авторы пренебрегали индусскими цифрами, конечно, представляетъ собою загадку. Канторъ предполагаетъ, что въ одно время могли существовать соперничавшія между собою школы, изъ которыхъ одна слѣдовала исключительно греческимъ математикамъ, другая—индусскимъ [2]).

Алгебра Альхуаризмî—первое сочиненіе, въ которомъ встрѣчается слово „алгебра". Заглавіе этого труда—*альджебръ уальмукâбала*. Эти два слова означаютъ „возстановленіе и противуположеніе". Подъ „возстановленіемъ" разумѣлось перенесеніе отрицательныхъ членовъ въ другую часть уравненія; подъ „противуположеніемъ"—отбрасываніе отъ обѣихъ частей уравненія равныхъ членовъ; послѣ этихъ операцій такіе члены появляются только въ той части уравненія, въ которой они были въ избыткѣ. Такъ, $5x^2-2x=6+3x^2$ посредствомъ альджебръ превращается въ $5x^2=6+2x+3x^2$;

---

[1]) Разсужденія о томъ, знали арабы употребленіе абака или нѣтъ, читатель найдетъ также въ сочиненіи: *H. Weissenborn*, Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert, pp. 5–9.

[2]) *Cantor*, I, 720.

это послѣднее уравненіе послѣ альмукâбала*) принимаетъ видъ $2x^2=6+2x$. Когда книга *альджебръ уальмукâбала* Альхуаризмî была переведена на латинскій языкъ, арабское заглавіе было сохранено, но съ теченіемъ времени второе слово было отброшено, первое же слово сохранилось въ формѣ *algebra***). Таково происхожденіе этого слова, какъ показываетъ изученіе рукописей. Въ прежнія времена, при отсутствіи этихъ рукописей, были въ ходу нѣсколько популярныхъ объясненій этимологіи слова „алгебра". Напримѣръ, слово это одно время производили отъ имени арабскаго ученаго *Джâбиръ ибнъ Афлагъ* изъ Севильи, котораго латиняне называли *Geber*. Но Геберъ жилъ на два вѣка позже, чѣмъ Альхуаризмî, и, слѣдовательно, спустя два вѣка послѣ того, какъ впервые появилось слово „алгебра" [1]).

Въ алгебрѣ Альхуаризмî, какъ и въ его ариѳметикѣ, нѣтъ ничего оригинальнаго. Въ ней объясняются элементарныя операціи и рѣшеніе линейныхъ и квадратныхъ уравненій. Откуда заимствовалъ авторъ свои свѣдѣнія по алгебрѣ? Невозможно допустить, что онъ заимствовалъ ихъ исключительно изъ индусскихъ источниковъ, ибо у индусовъ не было никакихъ правилъ, подобныхъ „возстановленію" и „противуположенію"; у нихъ не было обычая дѣлать всѣ члены уравненія положительными, какъ это производится при „возстановленіи". Правила Альхуаризмî нѣсколько напоминаютъ правила Діофанта. Но изъ этого мы не можемъ еще заключить, что арабскій писатель заимствовалъ свои свѣдѣнія исключительно изъ греческихъ источниковъ,

*) Буква *уау* (англ. w)—означаетъ по арабски союзъ „и"; *аль*—опредѣленный членъ. *Прим. ред.*

**) Среди сочиненій, переведенныхъ Герардомъ Кремонскимъ (XII в.), упоминается „*Liber alchoarismi de iebra et almucabala tractatus*"; Cod. Vatic., n° 2392, f. 98 recto, col. I; см. Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese e di Gherardo da Sabbionetta. Notizie raccolte da *B. Boncompagni*, p. 5 и facsimile. Cod. Vat., n° 4606 f 72 recto, начинается такъ: „Incipit liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala, et apud nos liber restauracionis nominatur, et fuit translatus a magistro Giurardo Cremonense in toleto de arabico in latinum" *Ibid.* p. 28. *Прим. ред.*

[1]) См. *Cantor*, I, 676, 678–679; *Hankel*, p. 248; *Felix Müller*, Historisch-etymologische Studien über Mathematische Terminologie, Berlin, 1887, pp. 9, 10.

такъ какъ, въ противность Діофанту, но такъ же, какъ и индусы, онъ признавалъ два корня въ квадратномъ уравненіи и допускалъ ирраціональныя рѣшенія. Кажется поэтому, что *альджебръ уальмукâбала* не принадлежитъ ни чисто греческой ни чисто индусской наукѣ, а представляетъ собою помѣсь той и другой, при чемъ греческій элементъ преобладаетъ.

Въ одномъ отношеніи эта алгебра, а также и другія арабскія алгебры стоятъ ниже какъ индусскихъ образцовъ, такъ и Діофантова труда: восточные арабы не употребляютъ никакихъ символовъ. По отношенію къ обозначеніямъ различныя алгебры раздѣляются на три класса[1]). 1) *Реторическія алгебры*, въ которыхъ нѣтъ никакихъ символовъ, а всѣ предложенія пишутся полностью словами. Къ этому классу принадлежатъ арабскія сочиненія (за исключеніемъ сочиненій западныхъ арабовъ позднѣйшаго времени), греческіе труды Ямвлиха и Θимарида и сочиненія раннихъ итальянскихъ писателей и Регіомонтана. Уравненіе $x^2 + 10x = 39$ выражалось у Альхуаризмî слѣдующимъ образомъ: „Квадратъ и десять корней его равны тридцати девяти диргемъ; т. е., если придать къ квадрату десять корней, то это составитъ вмѣстѣ тридцать девять“.

2) *Синкопированныя алгебры*, въ которыхъ, какъ и въ первомъ классѣ, все написано словами, но для выраженія извѣстныхъ, часто встрѣчающихся дѣйствій и понятій употребляются сокращенія. Таковы творенія Діофанта, позднѣйшихъ западно-арабскихъ математиковъ и позднѣйшихъ европейскихъ писателей почти до средины семнадцатаго столѣтія (за исключеніемъ алгебры Вьеты). Для иллюстраціи мы заимствуемъ одну изъ Діофантовыхъ задачъ, но ради большей ясности мы будемъ употреблять для обозначенія чиселъ индусскія цифры, а вмѣсто греческихъ символовъ— сокращенія соотвѣтствующихъ русскихъ*) словъ. Пусть К., Ч., Е., м. означаютъ „квадратъ“, „число“, „единица“, „минусъ“; тогда рѣшеніе задачи III, 7 у Діофанта, а именно, найти три числа, сумма которыхъ есть квадратъ, и при томъ такихъ,

[1]) *Nesselmann*, pp. 302—306.

*) Въ подлинникѣ „англійскихъ“. *Прим. ред.*

чтобы каждая пара изъ нихъ представляла квадратъ,—можно выразить слѣдующимъ образомъ: „Предположимъ, что сумма трехъ искомыхъ чиселъ равна квадрату 1 К. 2 Ч. 1 Е, первое и второе вмѣстѣ [1]) 1 К., тогда остатокъ 2 Ч. 1 Е будетъ третьимъ числомъ. Пусть второе и третье равны 1 К. 1 Е. м. 2 Ч.; квадратный корень изъ этого числа равенъ 1 Ч. м. 1 Е. Но всѣ три числа вмѣстѣ составляютъ 1 К. 2 Ч. 1 Е.; откуда слѣдуетъ, что первое есть 4 Ч. Но это первое число вмѣстѣ со вторымъ мы положили равнымъ 1 К., откуда слѣдуетъ, что второе число есть 1 К. м. 4 Ч. Слѣдовательно, первое и третье числа, взятыя вмѣстѣ, равныя 6 Ч. 1 Е., должны составлять квадратъ. Пусть этотъ квадратъ составляетъ 121 Е., тогда число составляетъ 20 Е; слѣдовательно первое неизвѣстное равно 80 Е., второе 320 Е., третье 41 Е., каковыя числа удовлетворяютъ условіямъ задачи“.

(3) *Символическія алгебры,* въ которыхъ всѣ формы и операціи представляются съ помощью вполнѣ развитаго символизма, какъ, напримѣръ, $x^2 + 10x = 39$. Къ этому классу можно отнести индусскія сочиненія, равно какъ и европейскія алгебры, начиная отъ средины семнадцатаго вѣка.

Благодаря этой классификаціи, которой мы обязаны Нессельману, вполнѣ ясно видно, насколько ушли впередъ индусы, видно и то, что ранніе арабы сдѣлали въ этомъ отношеніи шагъ назадъ. Арабы сдѣлали, однако, существенные вклады въ ту часть математической науки, которую можно было бы назвать геометрической алгеброй. Они не только давали геометрическія доказательства, въ дополненіе къ ариѳметическимъ (Альхуаризмî, Аль Кархи), для формулъ рѣшенія квадратныхъ уравненій, но и открыли (Аль-Мâгâнî, Абŷ Джа'фаръ Альхâзинъ, Абŷ'ль Джŷдъ, 'Омаръ Альхайямî) геометрическое рѣшеніе кубическихъ уравненій, которыя считались еще алгебраически неразрѣшимыми. Корни строились съ помощью пересѣченія коническихъ сѣченій [2]).

[1]) Въ нашихъ современныхъ обозначеніяхъ данныя здѣсь выраженія суть, соотвѣтственно: $x^2 + 2x + 1$, x^2, $2x + 1$; $x^2 + 1 - 2x$, $x - 1$, $x^2 + 2x + 1$, $4x$, x^2, $x^2 - 4x$, $6x + 1$.

[2]) Ср. *Cantor,* I, 678, 682, 736, 731—733; *Hankel,* pp. 274—280.

Аль Кархӣ былъ первымъ арабскимъ авторомъ, давшимъ и доказавшимъ теоремы о суммованіи рядовъ:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+\cdots+n)$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

Мы уже намекали на то, что западные арабы пользовались болѣе или менѣе развитымъ алгебраическимъ символизмомъ. Въ то время, какъ на Востокѣ вошло въ моду геометрическое изложеніе алгебры, на Западѣ разрабатывали ариѳметику и алгебру независимо отъ геометріи. Интереснымъ является для насъ сочиненіе *Алькальсâдӣ* изъ Андалузіи или изъ Гранады, умершаго въ 1486 или въ 1477 г.[1]). Его книга была озаглавлена такъ: „*Снятіе покрывала науки Губâръ*". Слово „губâръ" означало первоначально „пыль" и означаетъ здѣсь письменное счисленіе съ помощью цифръ, противопоставляемое умственному счисленію. При сложеніи, вычитаніи и умноженіи результатъ пишется *надъ* другими цифрами. Квадратный корень обозначается знакомъ , начальной буквой *) слова *джисзръ*, означающаго „корень", въ частности „квадратный корень". Такъ, $\sqrt{48}=$ ج над 84 .Пропорція $7:12=84:x$ писалась такъ: ج .˙. 84 .˙. 12 .˙. 7; вѣроятно символъ неизвѣстнаго представлялся воображенію читателя, какъ сокращеніе слова *джагала*—„не знать". Нужно замѣтить, что арабы пишутъ справа налѣво. Въ алгебрѣ, въ тѣсномъ смыслѣ этого слова, неизвѣстное выражалось словами *шаи* или *джисзръ*; Алькальсâдӣ употребляетъ сокращенія $x=$ ش **) $x^2=$ م ***), ل ****) для обозначенія равенства. Такъ, онъ пишетъ $3x^2=12x+63$ слѣдующимъ образомъ:

63 ش ل م
12 3

[1]) *Cantor*, I, 762—768.

*) „Джимъ". *Прим. ред.*

**) „Шинъ". *Прим. ред.*

***) „Мӣмъ" отъ „мâль". *Прим. ред.*

****) „Лâмъ"—конечная согласная буква слова „ʻадола". *Прим. ред.*

Этотъ символизмъ началъ, вѣроятно, развиваться у западныхъ арабовъ не позже, чѣмъ во времена *Ибнъ Альбанны* (родившагося въ 1252 или 1257 г.). Онъ представляетъ для насъ интересъ потому, что европейскiе переводчики арабскихъ сочиненiй подражали въ этомъ отношенiи арабскимъ оригиналамъ.

Европа въ среднiе вѣка.

Варварскiе народы, которые изъ лѣсовъ и съ болотъ Сѣвера и съ Уральскихъ горъ устремились на Европу и разрушили Римскую Имперiю, гораздо медленнѣе, чѣмъ магометане, усваивали умственныя сокровища и цивилизацiю древняго мiра. Первые слѣды математическихъ знанiй на Западѣ указываютъ на римское происхожденiе.

Введенiе римской ариѳметики. Послѣ Боэтiя и Кассiодорiя математическая дѣятельность въ Италiи замерла. Около ста лѣтъ спустя *Исидоръ* (570—636), епископъ города Севильи въ Испанiи, написалъ энциклопедiю, озаглавленную *Origines.* Она была составлена по образцу римскихъ энциклопедiй Марцiина Капеллы и Кассiодорiя. Часть этой энциклопедiи занимаетъ quadruvium. Исидоръ даетъ опредѣленiя техническихъ терминовъ и ихъ этимологiй; но не описываетъ способовъ вычисленiя, бывшихъ тогда въ ходу. Онъ раздѣляетъ числа на нечетныя и четныя, говоритъ о совершенныхъ и избыточныхъ числахъ, и т. д., и, наконецъ, выражаетъ свой восторгъ передъ числами въ слѣдующей фразѣ: „отними число отъ всѣхъ вещей, и все придетъ въ разрушенiе“ [1]). За Исидоромъ слѣдуетъ еще столѣтiе полной тьмы; затѣмъ появляется англiйскiй монахъ *Беда Достопочтенный* (672—735). Среди его трудовъ есть трактатъ о *Счисленiи (Computus),* т. е. о вычисленiи времени празднованiя Пасхи и о счетѣ на пальцахъ.

Повидимому, въ тѣ времена широко пользовались при вычисленiи символизмомъ пальцевъ. Правильное опредѣленiе времени празднованiя Пасхи представляло задачу, сильно

[1]) *Cantor,* I, 774.

волновавшую тогда Церковь. Въ каждомъ монастырѣ желательно было имѣть, по крайней мѣрѣ, одного монаха, умѣвшаго опредѣлять времена церковныхъ празднествъ, и это служило въ тѣ времена сильнѣйшей побудительной причиной къ изученію ариѳметики. „Вычисленіе времени празднованія Пасхи“, говоритъ Канторъ, „это центральный пунктъ исчисленія времени; оно основано какъ у Беды, такъ и у Кассіодорія и другихъ па совпаденіи солнечнаго и луннаго времени черезъ каждыя девятнадцать лѣтъ и не предъявляетъ, поэтому, неумѣренныхъ требованій къ ариѳметическимъ знаніямъ ученика, желающаго умѣть просто рѣшать эту задачу“ [1]). Бедѣ приходится мало говорить о дробяхъ, и этому не слѣдуетъ удивляться. Въ одномъ мѣстѣ онъ упоминаетъ о римскомъ двѣнадцатиричномъ дѣленіи на унціи.

Годъ смерти Беды есть вмѣстѣ съ тѣмъ годъ рожденія слѣдующаго за нимъ выдающагося мыслителя—*Алькуина* (735—804). Воспитанный самъ въ Ирландіи, онъ затѣмъ при дворѣ Карла Великаго руководилъ дѣломъ воспитанія въ великой Франкской Имперіи. Въ школахъ, основанныхъ имъ при монастыряхъ, учили псалмы, обучались письму, пѣнію, счету *(computus)* и грамматикѣ. Такъ какъ опредѣленіе времени празднованія Пасхи не могло представлять никакого особеннаго интереса для мальчиковъ, учившихся въ школахъ, то слово *computus* означаетъ, вѣроятно, счетъ вообще. Намъ неизвѣстны способы вычисленія, употреблявшіеся въ тѣ времена. Мало вѣроятно, чтобы Алькуинъ знакомъ былъ съ абакомъ или съ апексами Боэтія. Имя его стоитъ въ томъ длинномъ спискѣ ученыхъ среднихъ вѣковъ и времени Возрожденія, которые привлекали теорію чиселъ къ богословію. Напримѣръ, число существъ, сотворенныхъ Богомъ, сотворившимъ все хорошо, есть шесть, такъ какъ шесть число совершенное (оно равно суммѣ своихъ дѣлителей 1, 2, 3); 8—число съ недостаткомъ, такъ какъ сумма его дѣлителей $1+2+4<8$, и по этой причинѣ вторичнымъ своимъ происхожденіемъ человѣчество обязано числу 8: таково было число душъ, бывшихъ, по Писанію, въ Ноевомъ ковчегѣ.

---

[1]) *Cantor,* I, 780.

Существуетъ сборникъ „задачъ для изощренія ума“ *), который несомнѣнно восходитъ къ 1000 г. по Р. Х., а можетъ быть, написанъ и еще раньше. Канторъ держится того мнѣнія, что задачи эти были написаны значительно раньше, и именно самимъ Алькуиномъ. Среди ариѳметическихъ задачъ этого сборника есть задачи объ источникахъ, съ которыми мы встрѣчались у Герона, въ греческой анѳологіи и у индусовъ. Содержаніе 26-ой задачи слѣдующее: собака гонится за кроликомъ, который находится въ 150 футахъ отъ нея; она дѣлаетъ прыжокъ въ 9 футовъ каждый разъ, какъ кроликъ прыгаетъ на 7 футовъ. Чтобы опредѣлить, сколько прыжковъ должна сдѣлать сабака, чтобы догнать кролика, нужно раздѣлить 150 на 2. Подъ № 35 находится такая задача: нѣкто, умирая, завѣщалъ, чтобы состояніе его было раздѣлено слѣдующимъ образомъ: если жена его, которую онъ оставилъ въ ожиданіи ребенка, родитъ сына, то сынъ этотъ долженъ унаслѣдовать $\frac{3}{4}$ состоянія, а вдова $\frac{1}{4}$; если же родится дочь, то она должна получить $\frac{7}{12}$, а вдова $\frac{5}{12}$ всего состоянія. Какъ слѣдуетъ раздѣлить наслѣдство въ томъ случаѣ, когда родятся близнецы— сынъ и дочь? Задача эта интересна тѣмъ, что очень напоминаетъ знакомую намъ римскую задачу и тѣмъ безспорно выдаетъ свое римское происхожденіе. Рѣшеніе ея, однако, данное въ разсматриваемомъ нами сборникѣ, отлично отъ римскаго рѣшенія и совершенно ошибочно. Нѣкоторыя изъ задачъ геометрическаго содержанія, другія представляютъ изъ себя просто загадки, какъ задача о волкѣ, козѣ и кочнѣ капусты, о которой мы еще упомянемъ. Составитель сборника, очевидно, хотѣлъ доставить своимъ читателямъ пріятное развлеченіе. Замѣчено, что склонность къ придумыванію шуточныхъ вопросовъ свойственна англо-саксонскому характеру, и что Алькуинъ обращалъ на себя особое вниманіе въ этомъ отношеніи. Интересно самое заглавіе сборника: „задачи для изощренія ума“. Не доказываютъ ли эти слова, что и во тьмѣ среднихъ вѣковъ признавали развивающую

*) Въ рукописномъ сборникѣ библіотеки монастыря въ Reichenau; трактатъ этотъ начинается словами: „Incipiunt capitula propositionum ad acuendos iuvenes“. *Cantor*, I, 786. *Прим. ред.*

силу математики? Часто приводятъ знаменитую надпись, которую Платонъ помѣстилъ надъ входомъ въ свою академію; здѣсь встрѣчаемся мы со свидѣтельствомъ, менѣе вѣсскимъ, но многозначительнымъ со стороны народа, который только еще начиналъ просыпаться отъ умственнаго сна.

Во время войнъ и смятенія, послѣдовавшихъ за паденіемъ имперіи Карла Великаго, научныя занятія были оставлены, но они возродились снова въ десятомъ столѣтіи, главнымъ образомъ, благодаря вліянію одного человѣка—*Герберта*. Онъ родился въ Орильякѣ въ Оверни, получилъ воспитаніе въ монастырѣ и затѣмъ изучалъ разныя науки, главнымъ образомъ—математику, въ Испаніи. Онъ былъ сначала епископомъ въ Реймсѣ, затѣмъ въ Равеннѣ и, наконецъ, сдѣлался папой, подъ именемъ Сильвестра II. Онъ умеръ въ 1003 г. послѣ жизни, проведенной въ политической и церковной борьбѣ.

Гербертъ внимательно изучилъ труды Боэтія и написалъ самъ два ариѳметическихъ сочиненія—*Правила вычисленія съ помощью абака* и *Небольшую книгу о дѣленіи чиселъ*. Изъ этихъ книгъ получаемъ мы впервые нѣкоторыя свѣдѣнія объ употреблявшихся въ то время методахъ вычисленія. Гербертъ пользовался абакомъ, который, вѣроятно, не былъ извѣстенъ Алькуину. Въ своей молодости Гербертъ преподавалъ въ Реймской школѣ, — гдѣ предметами обученія служили trivium и quadruvium, — и одинъ изъ его учениковъ разсказываетъ, что онъ заказалъ мастеру, изготовлявшему щиты, кожаную счетную доску, раздѣленную на 27 столбцовъ, и что онъ приготовилъ также марки, сдѣланныя изъ рога, на которыхъ были обозначены девять первыхъ числовыхъ знаковъ (apices). *Bernelinus*, ученикъ Герберта, въ своемъ описаніи абака говоритъ, что это была гладкая доска, которую геометры имѣли обыкновеніе посыпать голубымъ пескомъ и на которой затѣмъ чертили свои фигуры. Для ариѳметическихъ цѣлей доска раздѣлялась на 30 столбцовъ, изъ коихъ три предназначались для дробей, остальные же 27 раздѣлялись на группы по три столбца въ каждой. Каждая группа столбцовъ была обозначена соотвѣтственно буквами C (centum, 100), D

(decem, 10) и S (singularis) или M (monas). Бернелинъ приводитъ девять употреблявшихся тогда знаковъ (апексы Боэтія) и затѣмъ замѣчаетъ, что вмѣсто нихъ можно пользоваться также буквами греческаго алфавита [1]). Съ помощью этихъ столбцовъ можно писать любыя числа, не прибѣгая къ нулю, и производить всѣ ариѳметическія дѣйствія. Дѣйствительно, пріемы сложенія, вычитанія и умноженія, употреблявшіеся абацистами, согласовались по существу съ тѣми, которыми пользуются теперь. Прилагаемая фигура показываетъ умноженіе 4600 на 23 [2]). Ходъ вычисленія слѣдующій: $3 \times 6 = 18$; $3 \times 4 = 12$; $2 \times 6 = 12$; $2 \times 4 = 8$; $1 + 2 + 2 = 5$; уничтожимъ цифры 1, 2, 2 и напишемъ 5; $1 + 1 + 8 = 10$; уничтожимъ цифры 1, 1, 8, напишемъ 1 въ слѣдующемъ столбцѣ слѣва. Такимъ образомъ получается сумма 105800. При употребленіи марокъ вычеркиванію цифръ (напримѣръ, цифръ 1, 2, 2 въ четвертомъ столбцѣ) соотвѣтствовали удаленіе марокъ 1, 2, 2 и замѣна ихъ маркой съ цифрой 5. Если числа писались на пескѣ, то цифры 1, 2, 2 сглаживались и на мѣстѣ ихъ писали 5.

C	X	I	C	X	I
		4	6		
1	1	1	8		
	1	2			
	8	2			
		5			
				2	3

Процессъ дѣленія былъ совершенно отличенъ отъ современнаго. Это дѣйствіе казалось настолько труднымъ, что понятіе о *частномъ* почти отсутствовало въ древности. Гербертъ далъ правила для дѣленія, придуманныя, повидимому, такъ, чтобы удовлетворить слѣдующимъ тремъ условіямъ: (1) употребленіе таблицы умноженія должно быть, насколько возможно, ограничено; по крайней мѣрѣ, не слѣдуетъ никогда пользоваться умноженіемъ въ умѣ двузначнаго число на однозначное; (2) должно, насколько возможно, избѣгать вычитаній и замѣнять ихъ сложеніями; (3) дѣйствіе должно производиться чисто механическимъ путемъ, не прибѣгая къ испытаніямъ [3]). Необходимость соблюдать эти условія не покажется, можетъ быть, столь странной, если мы припомнимъ, что средневѣковые монахи не ходили въ

[1]) *Cantor,* I, 826.

[2]) *Friedlein,* p. 106.

[3]) *Hankel,* p. 323.

школу въ дѣтствѣ и не учили таблицы умноженія, пока память еще свѣжа. Гербертовы правила умноженія — древнѣйшія изъ существующихъ. Они настолько кратки, что для непосвященныхъ очень темны; вѣроятно, ихъ назначеніе состояло въ томъ чтобы помогать памяти, напоминая послѣдовательные шаги въ ходѣ вычисленія. Въ позднѣйшихъ рукописяхъ правила эти излагаются полнѣй. Мы объяснимъ это дѣленіе на слѣдующемъ примѣрѣ [1]): 4087 ÷ 6 = 681. Процессъ вычисленія представляетъ собою родъ „дополнительнаго дѣленія“. Зачатки этого пріема можно найти у римлянъ, но, насколько извѣстно, онъ никогда не примѣнялся ни индусами ни арабами. Онъ называется „дополнительнымъ“ дѣленіемъ, потому что у насъ, напримѣръ, дѣйствіе примѣняется не къ 6, а къ 10—6, или 4. Сущность этого процесса можно понять, быть можетъ, по слѣдующему частичному объясненію: 4000 ÷ 10 = 400, запишемъ эту часть частнаго внизу. Но дѣлитель 10 слишкомъ великъ; для исправленія ошибки прибавимъ 4 . 400 = 1600. Затѣмъ 1000 ÷ 10 = 100, запишемъ это внизу, какъ часть частнаго; для исправленія этой новой ошибки, прибавимъ 4 . 100 = 400. Затѣмъ 600 + 400 = 1000. Раздѣлимъ 1000 : 10, и такъ далѣе. Слѣдуетъ

$\bar{I}$	C	X	I
			4
			6
~~4~~		~~8~~	~~7~~
~~1~~	~~6~~	~~6~~	~~4~~
~~1~~	~~4~~	~~4~~	~~8~~
	~~4~~	~~8~~	~~9~~
	~~1~~	~~4~~	~~4~~
	~~1~~	~~2~~	~~3~~
	~~1~~	~~4~~	~~4~~
		~~6~~	~~7~~
		~~2~~	1
		~~1~~	
		~~1~~	
	~~4~~	~~4~~	~~6~~
	~~1~~	~~1~~	~~2~~
	~~1~~	~~1~~	~~1~~
	6	~~1~~	~~1~~
		8	~~1~~
			1

[1]) Цитировано у *Фридлейна*, p. 109. Механизмъ дѣленія состоитъ въ слѣдующемъ. Напишемъ дѣлимое 4087 и надъ нимъ дѣлителя 6. Надъ 6 напишемъ 4, разность между 10 и 6. Умножимъ эту разность 4 на 4 въ столбцѣ $\bar{I}$ и передвинемъ произведеніе 16 на одинъ столбецъ вправо; зачеркнемъ 4 въ столбцѣ $\bar{I}$ и напишемъ 4 въ столбцѣ C, подъ нижней горизонтальной чертой, какъ часть частнаго. Умножимъ 1 въ $\bar{I}$ на 4, напишемъ произведеніе 4 въ столбцѣ C; зачеркнемъ 1 и напишемъ 1 ниже, въ слѣдующемъ столбцѣ направо. Сложимъ числа въ C, 6 + 4 = 10, и напишемъ 1 въ I. Затѣмъ поступимъ, какъ и раньше: 1 . 4 = 4, напишемъ это въ C, и напишемъ 1 внизу; 4 . 4 = 16 въ C и X, 4 внизу въ X; 1 . 4 = 4 въ X, 1 внизу; 4 + 6 + 8 = 18 въ C и X; 1 . 4 = 4 въ X, 1 внизу; 4 + 8 = 12 въ C и X; 1 . 4 = 4 въ X, 1 внизу; 2 + 4 = 6 въ X, 6 . 4 = 24 въ X и I, 6 внизу; 2 . 4 = 8 въ I, 2 внизу;

замѣтить, что при дополнительномъ дѣленіи, подобномъ разсматриваемому нами, не было необходимости знать таблицу умноженія за предѣлами 5 [1]). Современному вычислителю можетъ казаться, что этотъ процессъ дѣленія настолько сложенъ, насколько могла сдѣлать его сложнымъ человѣческая изобрѣтательность. Не даромъ говорили о Гербертѣ, что онъ далъ правила дѣленія, которыя едва ли хорошо были поняты самыми прилежными изъ абацистовъ; немудрено, что арабскій способъ дѣленія, когда онъ былъ впервые введенъ въ Европѣ, назывался „золотымъ дѣленіемъ" (divisio aurea), между тѣмъ какъ методъ дѣленія съ помощью абака получилъ названіе „желѣзнаго дѣленія" (divisio ferrea).

Возникъ вопросъ о томъ, откуда узналъ Гербертъ объ абакѣ и дополнительномъ дѣленіи? Что касается абака, то онъ, вѣроятно, былъ заимствованъ имъ изъ сочиненій Боэтія, дополнительное же дѣленіе въ развитой формѣ не встрѣчается нигдѣ до Герберта. Является ли онъ главнымъ изобрѣтателемъ этого пріема? Какъ видно изъ одного его письма, онъ изучалъ сочиненіе объ умноженіи, написанное нѣкіимъ „Іосифомъ Мудрымъ" (Ioseph Sapiens Hispanus), но современные изслѣдователи не узнали еще ничего касательно личности и трудовъ этого человѣка [2]).

Въ теченіе пяти слѣдующихъ вѣковъ приборы для вычисленія съ помощью абака подверглись значительному измѣненію. Не только исчезла доска, посыпанная пескомъ, но исчезъ и Гербертовъ абакъ съ вертикальными столбцами и нумерованными марками (apices). Вмѣсто нихъ вошла въ употребленіе счетная доска съ чертами, проведенными *горизонтально* (слѣва направо) и съ совершенно одинаковыми,

---

$8+4+7=19$ въ X и I; $1 \cdot 4=4$ въ I, 1 внизу; $9+4=13$ въ X и I; $1 \cdot 4=4$ въ I, 1 внизу; $3+4=7$. Раздѣливъ 7 на 6 получаемъ 1 и 1 въ остаткѣ. Напишемъ 1 въ I вверху и 1 внизу. Сложимъ цифры по столбцамъ внизу и получимъ искомый отвѣтъ, т. е. $4087 \div 6 = 681$ съ остаткомъ 1.

[1]) Другіе примѣры дополнительнаго дѣленія см. у *Фридлейна*, pp. 109–124. *Günther*, Math. Unterr. im d. Mittelalter, pp. 102—106.

[2]) *Ср. H. Weissenborn,* Einführung der jetzigen Ziffern in Europa, Berlin, 1892.

ненумерованными марками. Употребленіе такой счетной доски объяснено въ первыхъ печатныхъ сочиненіяхъ по ариѳметикѣ; мы опишемъ его, когда будемъ говорить о Рекордѣ. Этотъ новый приборъ употреблялся въ Германіи, Франціи и Англіи, въ Италіи же его не было [1]).

Переводъ арабскихъ рукописей.—Среди сочиненій, переведенныхъ въ періодъ, начинающійся съ двѣнадцатаго столѣтія, находится ариѳметика Альхуаризмî (переведенная, вѣроятно, Ательгардомъ изъ Бата), алгебра Альхуаризмî (Герардомъ изъ Кремоны въ Ломбардіи) и астрономія Аль-Баттâнî (Платономъ изъ Тиволи). Іоаннъ Севильскій написалъ *liber alghoarismi*—компиляцію изъ арабскихъ писателей. Такимъ образомъ, арабская ариѳметика и арабская алгебра укрѣпились въ Европѣ Арабскіе, или, вѣрнѣе, индусскіе методы вычисленія, вмѣстѣ съ нулемъ и принципомъ помѣстнаго значенія, стали вытѣснять способы вычисленія посредствомъ абака. Но не сразу одержало побѣду новое надъ старымъ. Борьба между двумя школами ариѳметиковъ—старой *школой абацистовъ* и новой *альгористической школой*—продолжалась невѣроятно долго. Сочиненія, вышедшія изъ этихъ двухъ школъ, поразительно отличаются другъ отъ друга; отсюда, казалось бы, ясно видно, что обѣ школы заимствовали свои знанія изъ независимыхъ источниковъ; нѣкоторые, однако, доказываютъ, что Гербертъ получилъ свои апексы и свои ариѳметическіе познанія не у Боэтія, а у испанскихъ арабовъ, и что часть геометріи Боэтія, или даже вся эта книга, подложна и написана была во время Герберта. Если бы это было справедливо, то труды Герберта должны были бы выдавать свое арабское происхожденіе, подобно сочиненіямъ Іоанна Севильскаго. Но въ трудахъ Герберта мы не находимъ никакого сходства съ сочиненіями арабовъ. Гербертъ не могъ научиться у арабовъ употребленію абака, такъ какъ арабы и сами врядъ ли когда-нибудь имъ пользовались; объ этомъ, по крайней мѣрѣ, не дошло до насъ ни одного свидѣтельства, на которое можно было бы положиться. Альгористы, въ

[1]) См. *Cantor*, II, 198 199; о происхожденіи его см. въ сочиненіи *Gerhardt*, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München, 1877, p. 29.

противность абацистамъ, упоминаютъ объ индусахъ, употребляютъ слово ***альгоризмъ***, вычисляютъ съ помощью нуля и не употребляютъ абака; въ этомъ и состоитъ главное различіе между двумя школами альгористовъ и абацистовъ. Первые изъ нихъ учатъ, какъ извлекать квадратные корни, абацисты же этому не учатъ; альгористы учатъ употребленію шестидесятичныхъ дробей по обычаю арабовъ, тогда какъ абацисты пользуются римскими двѣнадцатиричными дробями.

Первое пробужденіе. Въ концѣ двѣнадцатаго столѣтія появился въ Италіи человѣкъ, обладавшій истиннымъ математическимъ дарованіемъ. Онъ не былъ монахомъ, подобно Бедѣ, Алькуину и Герберту, но дѣловымъ человѣкомъ, посвящавшимъ часы досуга занятіямъ математикой. *Леонарду изъ Пизы,* называемому также *Фибоначчи* или *Фибоначи*, мы обязаны первымъ возрожденіемъ математики на христіанской почвѣ. Будучи еще мальчикомъ, Леонардо научился пользоваться абакомъ. Въ позднѣйшіе годы, во время своихъ обширныхъ путешествій по Египту, Сиріи, Греціи и Сициліи, онъ освоился съ различными способами вычисленія. Изъ различныхъ пріемовъ онъ нашелъ безспорно наилучшимъ индусскій. По возвращеніи домой онъ издалъ въ 1202 году латинское сочиненіе—*liber abaci.* Второе изданіе появилось въ 1228 году. Книга эта содержитъ почти всю совокупность ариѳметическихъ и алгебраическихъ знаній арабовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ обнаруживаетъ, что авторъ не является простымъ компиляторомъ или рабскимъ подражателемъ. *Liber abaci* начинается такъ: „Девять индусскихъ знаковъ суть слѣдующія: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Съ помощью этихъ знаковъ и знака 0, который называется по арабски *сифръ,* можно написать какое угодно число“. Арабское слово *сифръ* (*сифра* — пустой) перешло въ латинское *zephirum* и англійское *cipher* *). Если мы вспомнимъ, что ара-

*) „Нумерацїо есть счисленїе еже совершенно вся числа рѣчїю именовати, яже въ десяти знаменованїяхъ, или изображенїя содержатся, и изображаются сице: 1, 2, 3, 4, 5,

бы писали *справа налѣво*, то намъ станетъ вполнѣ понятно, почему Леонардо въ приведенномъ нами отрывкѣ пишетъ цифры въ обратномъ порядкѣ, отъ большаго числа къ меньшему; также можно объяснить себѣ и то, что онъ писалъ $\frac{1}{2}182$ вмѣсто $182\frac{1}{2}$. *Liber abaci*—древнѣйшее извѣстное доселѣ сочиненіе, содержащее въ себѣ возвратный рядъ [1])*). Слѣдующая задача о семи старухахъ интересна потому, что она встрѣчается (въ нѣсколько иной формѣ) еще у Ахмеса, за 3000 лѣтъ до Леонардо: семь старухъ отправляются въ Римъ, у каждой изъ нихъ по семи муловъ, каждый мулъ несетъ по семи мѣшковъ, въ каждомъ мѣшкѣ по семи хлѣбовъ, въ каждомъ хлѣбѣ по семи ножей, каждый ножъ въ семи ножнахъ. Сколько всего предметовъ? *Отв.* 137256 [2])**). Трактатъ Леонарда въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій служилъ для авторовъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ сочиненій кладовой, изъ которой они брали матеріалъ для своихъ книгъ. Леонардова Алгебра была чисто „риторической“, то есть она была совершенно лишена алгебраическаго символизма.

Слава Леонарда распространилась по Италіи, и императоръ Фридрихъ II Гогенштауфенъ пожелалъ съ нимъ

6, 7, 8, 9, 0, из нихже девѧть назнаменователны сѹть: последнее же 0 [еже цыфрою, или ничемъ именѹетсѧ] егда ѹбо (оно) едино стоитъ, тогда само ѡ себѣ ничтоже значитъ“. *Магницкій,* Ариѳметика, Москва, 1703, листъ 20 (recto) [Часть первая]. Въ настоящее время правильное употребленіе слова „цифра“ сохранилось въ англійскомъ языкѣ. Французскія слова „chiffre“ — числовой знакъ и „zéro“ — нуль оба произошли, повидимому, отъ одного арабскаго слова *„сифръ“*. *Прим. ред.*

[1]) *Cantor,* II, 25.

*) Задача о числѣ паръ кроликовъ, которыя могутъ произойти отъ одной пары въ теченіе года: Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubbl. da *B. Boncompagni*, Roma, MDCCCLVII, pp. 283, 284. Леонардо даетъ числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, каждое изъ которыхъ равно суммѣ двухъ предыдущихъ. *Прим. ред.*

[2]) *Cantor,* II, 25.

**) Ср. прибавленіе въ концѣ книги: *„Сумма членовъ геометрической прогрессіи со знаменателемъ 7“*. *Прим. ред.*

встрѣтиться. Представленіе славнаго алгебраиста великому покровителю наукъ сопровождалось знаменитымъ научнымъ турниромъ. Іоаннъ Палермскій, императорскій нотаріусъ, предложилъ нѣсколько задачъ, которыя Леонардо быстро рѣшилъ. Первая задача состояла въ томъ, чтобы найти число x такъ, чтобы оба числа x^2+5 и x^2-5 были квадратами. Отвѣтъ заключается въ томъ что $x=3\frac{5}{12}$, такъ какъ $(3\frac{5}{12})^2+5=(4\frac{1}{12})^2$; $(3\frac{5}{12})^2-5=(2\frac{7}{12})^2$. Арабы уже рѣшали подобныя задачи, но нѣкоторыя части Леонардова рѣшенія, повидимому, найдены имъ самостоятельно. Вторая задача состояла въ рѣшеніи уравненія $x^3+2x^2+10x=20$. Общее алгебраическое рѣшеніе кубическихъ уравненій было тогда неизвѣстно, но Леонарду удалось найти приближенное значеніе одного изъ корней. Онъ далъ рѣшеніе $x=1^0\ 22^{I}\ 7^{II}\ 4^{III}\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$, выразивъ его въ видѣ шестидесятичной дроби. Если эту дробь обратить въ десятичную, то рѣшеніе окажется вѣрнымъ до девятаго десятичнаго знака. Эти задачи и другія, рѣшенныя Леонардомъ, обнаруживаютъ въ немъ блестящій талантъ. Его геометрическихъ сочиненій мы коснемся впослѣдствіи.

Въ Италіи индусскія цифры были съ готовностью приняты просвѣщенными массами, въ ученыхъ же кругахъ ихъ сначала отвергали. Итальянскіе купцы пользовались ими еще въ тринадцатомъ вѣкѣ; въ 1299 году флорентійскимъ купцамъ было запрещено употреблять индусскія цифры въ бухгалтеріи и приказано было или пользоваться римскими цифрами или же писать числа полностью словами [1]). Приказъ этотъ оправдывался, вѣроятно, тѣмъ обстоятельствомъ, что употреблявшіяся тогда индусскія цифры не приняли еще опредѣленныхъ окончательныхъ видовъ, и поэтому разнообразіе формъ, въ которыхъ писались нѣкоторыя цифры, приводило иногда къ двусмысленности и недоразумѣніямъ и даже давало поводъ къ обману. Даже въ наше время денежныя суммы на чекахъ и счетахъ всегда пишутся словами. Среди итальянцевъ встрѣчаемъ мы свидѣтельства ранней зрѣлости ариѳметики. „Тосканцы вообще“, го-

---

[1]) *Hankel*, p. 341.

воритъ Пикокъ, „и въ особенности флорентинцы, городъ которыхъ былъ колыбелью литературы и искусствъ въ тринадцатомъ и четырнадцатомъ столѣтіяхъ, славились своимъ знаніемъ ариѳметики; методъ бухгалтеріи, извѣстный подъ спеціальнымъ названіемъ италіанскаго, былъ изобрѣтенъ ими; и ариѳметическія дѣйствія, которыя были такъ необходимы для правильнаго веденія ихъ обширной торговли, повидимому, изучались и совершенствовались ими съ особымъ стараніемъ; имъ мы обязаны... формальнымъ введеніемъ въ ариѳметическія книги, подъ отдѣльными заглавіями, задачъ на простое и двойное тройныя правила, на прибыли и убытки, товарищество, денежные переводы, простые проценты, учетъ, сложные проценты, и такъ далѣе“ [1]).

Въ Германіи, Франціи и Англіи индусскія цифры почти не употреблялись до второй половины пятнадцатаго вѣка [2]). Небольшая книга объ индусской ариѳметикѣ, озаглавленная *De arte numerandi*, называвшаяся также *Algorismus*, была въ ходу, главнымъ образомъ, во Франціи и Италіи, въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій. Ее обыкновенно приписываютъ *Джону Галифаксу*, именуемому также *Sacrobosco*, или *Holywood*; онъ родился въ Іоркширѣ, получилъ воспитаніе въ Оксфордѣ, но впослѣдствіи поселился въ Парижѣ, гдѣ занимался преподаваніемъ до самой своей смерти, послѣдовавшей въ 1256 году. Книжечка эта содержитъ правила безъ доказательствъ и безъ численныхъ примѣровъ; о дробяхъ тамъ нѣтъ ничего. Она была напечатана въ 1488 г. и еще много разъ впослѣдствіи. Согласно Де-Моргану это „первое ариѳметическое сочиненіе, напечатанное во французскомъ городѣ (Страсбургѣ)“ [3]).

Иногда писатели среднихъ вѣковъ опережали свое время, изобрѣтая нѣкоторыя обозначенія, напоминающія современныя. Напримѣръ, *Nicole Oresme*, епископъ въ Нормандіи (около 1323—1382 гг.), первый пришелъ къ понятію

---

[1]) *Peacock*, p. 414.

[2]) См. *Unger*, p. 14.

[3]) См. *Bibloth. Mathem.*, 1894, pp. 73—78; также 1895, pp. 36—37; *Cantor*, II, pp. 80—82; „De arte numerandi“ перепечатано было въ послѣдній разъ въ сборникѣ *J. O. Halliwell*, Rara Mathematica, 1839.

о дробныхъ показателяхъ, снова открытыхъ впослѣдствіи Стевиномъ, и предложилъ для нихъ особаго рода обозначеніе. Такъ [1]), вслѣдствіе того, что $4^3 = 64$, а $\sqrt{64} = 8$, $4^{1\frac{1}{2}} = 8$. Въ обозначеніяхъ Орема $4^{1\frac{1}{2}}$ выражается такъ: $\boxed{1\,p\cdot\frac{1}{2}}\;4$, или $\boxed{\frac{p\cdot 1}{1.\ 2}}\;4$. *) Несмотря на эти факты, все-таки остается вѣрнымъ то, что въ четырнадцатомъ и пятнадцатомъ вѣкахъ было сдѣлано сравнительно мало самобытныхъ математическихъ изслѣдованій. Въ это время было много писателей, но ихъ попытки сдѣлать что-либо для науки парализовались дурными методами схоластической логики.

---

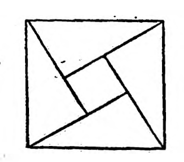
[1]) *Cantor*, II, 121.

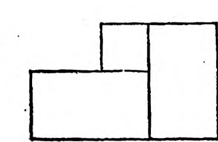
*) Ср. прибавленіе въ концѣ книгѣ. *Прим. ред.*

Геометрія и Тригонометрія.

Индусы.

Нашъ отчетъ объ индусскихъ геометрическихъ изысканіяхъ будетъ очень кратокъ; во-первыхъ потому, что, какъ и у египтянъ и римлянъ, у индусовъ никогда не было *науки* геометріи; во-вторыхъ потому, что индусы, въ противность египтянамъ и римлянамъ, никогда не были въ геометріи учителями другихъ народовъ. Существуютъ, повидимому, указанія на то, что нѣкоторыя части индусской геометріи были заимствованы ими у грековъ*). Брахмагупта даетъ „Геронову формулу" для вычисленія площади треугольника. Онъ также даетъ предложеніе Птолемея о томъ, что произведеніе діагоналей четыреугольника равно суммѣ произведеній противуположныхъ сторонъ, но не упоминаетъ о томъ, что теорема эта примѣнима только къ четыреугольникамъ, вписаннымъ въ кругъ! Вычисленіе площадей составляетъ главную часть индусской геометріи. Арьябхатта даетъ $\pi = \frac{31416}{10000}$. Интересно данное Бхаскарой доказательство теоремы о прямоугольномъ треугольникѣ. Онъ чертитъ прямоугольный треугольникъ четыре раза внутри квадрата, построеннаго на гипотенузѣ такъ что въ срединѣ остается квадратъ, сторона котораго равна разности между двумя катетами прямоугольнаго треугольника. Располагая иначе этотъ маленькій квадратъ и четыре треугольника, онъ по



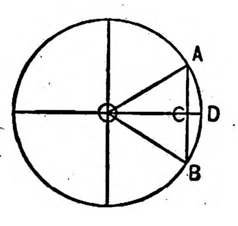


---

*) Ср. прибавленіе въ концѣ книги „о древне-индусской геометріи". *Прим. ред.*

казываетъ, что они вмѣстѣ составляютъ сумму квадратовъ катетовъ. „Смотри“, говоритъ Бхаскара, не прибавляя больше ни одного слова для объясненія теоремы *). Индусскіе писатели не имѣютъ обыкновенія давать доказательства въ строгой формѣ. Бретшнейдеръ предполагаетъ, что доказательство, данное Пиѳагоромъ, по существу походило на вышеприведенное доказательство Бхаскары. Въ другомъ мѣстѣ Бхаскара даетъ второе доказательство этой теоремы, опуская перпендикуляръ изъ вершины прямого угла на гипотенузу и разсматривая соотвѣтствующимъ образомъ пропорціи, получаемыя при сравненіи образованныхъ такимъ образомъ подобныхъ треугольниковъ. Это доказательство оставалось неизвѣстнымъ въ Европѣ, пока оно не было снова открыто Валлисомъ.

Съ бо́льшимъ успѣхомъ изучали индусы тригонометрію, которая, однако, и у нихъ, какъ и у грековъ, служила лишь орудіемъ для астрономическихъ изысканій. Подобно вавилонянамъ и грекамъ, они раздѣляютъ кругъ на 360 градусовъ и 21600 минутъ. Принимая $\pi = 3.1416$ и $2\pi r = 21600$, они получили $r = 3438$, то есть, что радіусъ содержитъ почти 3438 такихъ дѣленій круга. Этотъ выводъ чуждъ духу греческой геометріи. Нѣкоторые греческіе математики не рѣшились бы измѣрять *прямую линію* частями *кривой*. У Птолемея раздѣленіе радіуса на шестидесятичныя доли производилось независимо отъ дѣленія окружности; онъ не пользовался *общей* единицей мѣры. Индусы раздѣляли каждый квадрантъ на 24 равныя части, такъ что каждая изъ этихъ частей заключала въ себѣ 225 изъ 21600 единицъ. Характерной чертой тригонометріи индусовъ является то, что они при вычисленіяхъ не пользовались полной хордой двойной данной дуги, а *синусомъ* этой дуги (т. е. полухордой двойной дуги) и *обращеннымъ синусомъ* дуги. Полная хорда AB называлась у Брахминовъ *джйа* или *джйва*; эти слова означали также тетиву охотничьяго лука. Для AC, или половины хорды, они употребляли слова *джйардха*, или



*) Ср. прибавленіе въ концѣ книги. *Прим. ред.*

ардхаджйа; для краткости пользовались также названіями полной хорды. Интересно прослѣдить исторію этихъ словъ. Въ арабской транскрипціи *дживâ*, или *джйва*, писалось *джйба*. Вмѣсто этого слова арабы стали употреблять слово *джайбъ*, писавшееся почти такъ же *) и означавшее „пазуха". Это слово, въ свою очередь, было переведено на латинскій языкъ словомъ *sinus* Платономъ изъ Тиволи. Такъ возникло въ тригонометріи слово *синусъ***). „Обращенный синусъ" индусы означали словомъ *уткрамаджйâ*, „косинусъ" — *коти-джйâ*[1]). Слѣдуетъ замѣтить, что индусы пользовались тремя изъ извѣстныхъ намъ тригонометрическихъ функцій, между тѣмъ какъ греки разсматривали только хорду.

Индусы вычислили таблицу синусовъ съ помощію метода, теорія котораго проста. Синусъ 90^0 принимался равнымъ радіусу, или 3438, хорда дуги AB въ 60^0 была равна тогда тоже 3438, поэтому половина этой хорды AC, или синусъ 30^0, равнялся 1719. Примѣняя формулу $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$ и замѣчая, что $\sin 45^0 = \cos 45^0$, индусы получили $\sin 45^0 = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$. Подставляя вмѣсто $\cos a$ его значеніе $\sin(90 - a)$ и полагая $a = 60^0$, они получили:

$$\sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3r^2} = 2978.$$

Исходя изъ полученныхъ значеній синусовъ 90^0, 60^0 и 45^0, они вычислили синусы половинныхъ угловъ по формулѣ $\text{sinvers}\, 2a = 2\sin^2 a$ и получили такимъ образомъ синусы

*) Т. е. съ помощью тѣхъ же согласныхъ. Въ семитическихъ языкахъ корни словъ состоятъ изъ согласныхъ, которыя только и изображаются отдѣльными буквами; гласныя изображаются особыми значками, которые пишутся надъ строкой или подъ строкой, и въ нѣкоторыхъ рукописяхъ опускаются. *Прим. ред.*

**) Эта гипотеза происхожденія слова „синусъ" принадлежитъ французскому оріенталисту *Мунку* (ср. *F. Woepcke*, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens, Journal Asiatique, 1863, I, p. 478, примѣчаніе) см. также зам. J. *Raska* въ Zeitschrift für Mathem. u. Physik, 1895, Litt.-hist. Teil, pp. 126 и слѣд. Введеніе слова *sinus* приписывается, однако, ошибочно Платону изъ Тиволи; его можно приписать съ большей вѣроятностью Герарду Кремонскому. См. *A. von Braunmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, I. Th., Lpzg., 1900, pp. 49, 50. *Прим. ред.*

[1]) *Cantor*, I., 616, 693.

$22^{\circ}30'$, 15°, $11^{\circ}15'$, $7^{\circ}30'$, $3^{\circ}45'$. Затѣмъ нашли они синусы дополненій этихъ угловъ, а именно синусы $86^{\circ}15'$, $82^{\circ}30'$, $78^{\circ}45'$, 75°, $67^{\circ}30'$; потомъ синусы половинъ этихъ угловъ, дополненій этихъ половинъ, и такъ далѣе. Съ помощью этого очень простого процесса они получили синусы всѣхъ угловъ, разнящихся другъ отъ друга на $3^{\circ}45'$ [1]). Среди дошедшихъ до насъ индусскихъ математическихъ трактатовъ нѣтъ ни одного, посвященнаго тригонометріи треугольника. Въ ихъ астрономическихъ сочиненіяхъ даны рѣшенія плоскихъ и сферическихъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Косоугольные треугольники рѣшались посредствомъ разложенія на прямоугольные, что давало возможность выполнять всѣ обыкновенныя вычисленія. Такъ какъ таблица синусовъ доставляла значенія синусовъ угловъ, разнящихся другъ отъ друга на $3\frac{3}{4}$ градуса, то синусы промежуточныхъ угловъ приходилось находить съ помощью интерполяціи. Астрономическія наблюденія и вычисленія индусовъ обладали поэтому только посредственной степенью точности [2]) *).

---

[1]) *A, Arneth,* Die Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart, 1852, pp. 172. 173. Это сочиненіе мы будемъ цитировать: *Arneth.* См. также *Hankel,* p. 217.

[2]) *Arneth,* p. 174.

*) Въ „*Сиддханта-Сиромáни*" Бхаскара указываетъ на другой способъ вычисленія таблицы синусовъ для всѣхъ дугъ черезъ каждый градусъ. Онъ исходитъ изъ равенства $\sin 1^{\circ} = 60$ и пользуется выраженіемъ для синуса суммы или разности въ такой формѣ: $\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b}{r} \pm \frac{\cos a \sin b}{r}$. Онъ получаетъ такимъ образомъ равенство: $\sin(a \pm 1^{\circ}) = \left(\sin a - \frac{\sin a}{6569}\right) \pm \frac{10 \cos a}{573}$; чтобы вывести его, слѣдуетъ замѣтить, что $\frac{\sin 1^{\circ}}{r} = \frac{60}{3438} = \frac{10}{573}$. Для косинуса 1° получается такое значеніе: $\frac{\cos 1^{\circ}}{r} = 1 - \frac{1}{6569} = \frac{6568}{6569} = 0{,}999846247\ldots$, вѣрное до 5-го десятичнаго знака: III часть *Сид. Сир.*, называемая *Голáдхйáйа*, отдѣлъ *джйотпатти; Сид. Сир.*, изд. *Л. Уилькинсономъ*, Calcutta, 1842, *Голáдхйáйа* переведена имъ же и индусскимъ ученымъ *Бáпу Дева Сáстриномъ*, Calcutta, 1861—62; см. въ пер. *Уилькинсона* стр. 263—268. Ср. *v. Braunmühl.* Vorl. üb. Gesch. d. Trigon., Th. I., p. 37.

Прим. ред.

Арабы.

Арабы почти ничего не внесли въ древнюю сокровищницу геометрическихъ знаній. Они, однако, сыграли чрезвычайно важную роль въ исторіи математики; они были хранителями греческой и восточной науки, которую въ свое время передали Западу. Исходнымъ пунктомъ всѣхъ геометрическихъ работъ у арабовъ служили *Начала* Евклида. Нѣсколько разъ переводили они на арабскій языкъ это великое произведеніе. Легко представить себѣ трудности, встрѣчавшіяся арабамъ при этихъ переводахъ. Вѣдь это былъ народъ, только что вышедшій изъ состоянія варварства и не привыкшій къ математической мысли, народъ, которому трудно давалось, къ тому же, точное изученіе иностранныхъ языковъ. Гдѣ можно было найти человѣка, который безъ помощи грамматикъ и словарей хорошо изучилъ бы оба языка, греческій и арабскій, и былъ бы въ то же самое время математикомъ? Какъ можно было передать въ высокой степени утонченную научную мысль неразвитымъ умамъ на неразвитомъ языкѣ? Нѣтъ, конечно, ничего удивительнаго въ томъ, что потребовалось нѣсколько послѣдовательныхъ попытокъ перевода Евклида на арабскій языкъ, при чемъ каждый новый переводчикъ пользовался опытомъ своего предшественника.

Арабскіе правители поступали мудро, обращаясь за помощью къ греческимъ ученымъ. Въ Сиріи науками, въ особенности философіей и медициной, занимались греки-христіане. Особенно славились школы въ Антіохіи и Эмесѣ, и несторіанская школа въ Эдессѣ. Послѣ разграбленія и разрушенія Александріи, въ 640 году, онѣ стали главными хранилищами греческой учености на Востокѣ. Евклидовы *Начала* были переведены на сирійскій языкъ. Изъ Сиріи греки-христіане были призваны въ Багдадъ, столицу магометанъ. Во время калифа *Гарýнъ-ар-Рашúда* (786—809) былъ

сдѣланъ первый арабскій переводъ Птолемеева *Альмагеста*, также переводъ Евклидовыхъ *Началъ* (первыя шесть книгъ), авторомъ котораго является *Хадджаджъ ибнъ Іусуфъ ибнъ Матаръ*[1]). Онъ сдѣлалъ второй переводъ при калифѣ Аль Мамунѣ (813—833). Этотъ калифъ, заключая мирный договоръ съ византійскимъ императоромъ, получилъ, по одному изъ условій этого договора, большое число греческихъ рукописей, которыя онъ повелѣлъ перевести на арабскій языкъ. Евклидовы *Начала* и *Шаръ и Цилиндръ* Архимеда перевелъ *Абу Іа'кубъ Исхакъ ибнъ Хунайнъ*, подъ наблюденіемъ своего отца *Хунайна ибнъ Исхака*[2]). Эти переводы оказались неудовлетворительными; переводчики, хотя и хорошіе филологи, были плохими математиками. Въ это время къ тринадцати книгамъ *Началъ* прибавлены были четырнадцатая, принадлежащая Гипсиклу (?), и пятнадцатая, авторомъ которой былъ Дамасцій (?). На долю ученаго *Табитъ ибнъ Куррахъ* (836—901) выпало изданіе арабскаго Евклида, удовлетворяющаго всѣмъ потребностямъ. Среди другихъ важныхъ сочиненій, переведенныхъ на арабскій языкъ, были труды Аполлонія, Архимеда, Герона и Діофанта. Такимъ образомъ, въ теченіе одного вѣка, арабы добились того, что получили, наконецъ, доступъ къ обширной сокровищницѣ греческой науки.

Позднѣйшее и важное арабское изданіе Евклидовыхъ *Началъ* принадлежитъ даровитому ученому *Насиръ Эддину* (1201—1274), персидскому астроному, по настоянію котораго его покровитель Хулагу построилъ большую обсерваторію въ Марагѣ, предназначенную для самого Насиръ Эддина и его товарищей. Насиръ Эддинъ сдѣлалъ попытку доказать постулатъ параллельныхъ линій. Во всѣхъ такого рода попыткахъ вводятся нѣкоторыя новыя допущенія, равнозначащія тому, что

---

[1]) *Cantor*, I, 660; Biblioth. Mathem., 1892, p. 65. Отчетъ о переводчикахъ и комментаторахъ Евклида данъ былъ въ сочиненіи *Фигристъ*, важномъ библіографическомъ трудѣ, написанномъ на арабскомъ языкѣ въ 987 г. ученымъ *Ибнъ Аби Іа'кубъ ан-Надимъ*. См. нѣмецкій переводъ *Г. Зутера* въ Zeitschr. für Math. u. Phys., 1892, Supplement, pp. 3—87.

[2]) *Cantor*, I, 661.

надо доказать. Такъ, Насûръ Эддûнъ допускаетъ, что, если AB ⊥ CD въ точкѣ C и если другая прямая линія EDF образуетъ съ CD острый уголъ EDC, то перпендикуляры къ AB, заключенные между AB и EF и проведенные съ той стороны къ CD, гдѣ находится E, становятся все короче и короче, по мѣрѣ удаленія отъ CD[1]). Трудно видѣть, какъ можетъ этого не быть въ какомъ либо случаѣ, если не смотрѣть на дѣло глазами Лобачевскаго и Больэ. „Доказательство" Насûръ Эддûна оказало нѣкоторое вліяніе на дальнѣйшее развитіе теоріи параллельныхъ линій. Его изданіе Евклида было напечатано по-арабски въ Римѣ въ 1594 г., „доказательство" же Евклидова постулата было издано по-латыни Валлисомъ въ 1651 г.[2]). Интересно новое доказательство Пиѳагоровой теоремы, которое Насûръ Эддûнъ добавляетъ къ Евклидову доказательству[3]). Болѣе раннее доказательство, спеціально для случая равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника[4]), было дано *Мухаммедомъ ибнъ Мўса Альхуаризмû*, жившимъ въ царствованіе калифа Аль Мамўна, въ первые годы девятаго столѣтія. Тѣ скудныя свѣдѣнія по геометріи, которыя содержатся въ алгебрѣ Альхуаризмû, представляютъ первый плодъ занятій арабовъ въ области этой науки. Они носятъ на себѣ явные слѣды индусскаго вліянія. Кромѣ значенія $\pi = 3\frac{1}{7}$, мы находимъ тамъ также

---

[1]) Доказательство приведено у *Кэстнера*, I, 375—381 и отчасти въ Biblioth. Mathem., 1892, p. 5.

[2]) *Wallis*, Opera, II., 669–673.

[3]) См. *H. Suter*, въ Biblioth. Mathem., 1892, pp. 3 и 4. Въ сборникахъ доказательствъ этой теоремы, принадлежащихъ Гоффману и Випперу, авторы, приводя доказательство Насûръ Эддûна, не упоминаютъ его имени.

[4]) Нѣкоторые арабскіе писатели, напримѣръ, Беха Эддûнъ, называютъ Пиѳагорову теорему „фигурой невѣсты". Это романтическое названіе произошло, вѣроятно, отъ неправильнаго перевода греческаго слова *νύμφη*, примѣненаго къ пиѳагоровой теоремѣ однимъ византійскимъ писателемъ тринадцатаго вѣка. Это греческое слово допускаетъ два значенія: „невѣста" и „крылатое насѣкомое". Фигура прямоугольнаго треугольника со своими тремя квадратами напоминаетъ насѣкомое; Бега Эддûнъ, думалъ, однако, повидимому, что слово это означаетъ „невѣста". См. *Paul Tannery*, въ L'Intermédiaire des Mathématiciens, 1894, T. I, p. 254.

индусскія значенія $\pi = \sqrt{10}$ и $\pi = \frac{62832}{20000}$. За то въ позднѣйшихъ арабскихъ сочиненіяхъ почти нигдѣ не видно индусской геометріи; тамъ безспорно царитъ греческая геометрія. Въ книгѣ, написанной сыновьями *Mŷcâ ибнъ Шâкира*, (который въ юности своей былъ разбойникомъ), дана Геронова формула для вычисленія площади треугольника. Очень изящны изысканія, содержащіяся въ „геометрическихъ построеніяхъ“ ученаго *Абŷ'ль Уафâ* (940—998), уроженца Бузжана въ Хорассанѣ. Онъ усовершенствовалъ теорію черченія, показавъ, какъ строить углы правильныхъ многогранниковъ на описанномъ около нихъ шарѣ. Здѣсь впервые появляется условіе, которое впослѣдствіи сдѣлалось очень знаменитымъ на Западѣ, а именно, чтобы построеніе было выполнено однимъ растворомъ циркуля.

Лучшіе оригинальные труды арабовъ въ области математики заключаются въ геометрическомъ рѣшеніи кубическихъ уравненій и въ развитіи тригонометріи. Еще въ 773 г. калифъ Альмансуръ пріобрѣлъ индусскую таблицу синусовъ, по всей вѣроятности заимствованную изъ *Сиддхâнты* Брахмагупты. Арабы называли эту таблицу *Синдхиндъ*; она пользовалась у нихъ большимъ авторитетомъ. Въ раннія же времена были въ распоряженіи у арабовъ Птолемеевъ *Альмагестъ* и другія греческія астрономическія сочиненія. *Мухаммедъ ибнъ Mŷcâ Альхуаризмî*, по приглашенію калифа Аль Мамŷна, дѣлалъ извлеченія изъ *Синдхинда*, пересматривалъ таблицы Птолемея, производилъ наблюденія въ Багдадѣ и Дамаскѣ и измѣрялъ градусъ земного меридіана. Замѣчательно, что арабскіе авторы выводили формулы сферической тригонометріи не изъ „Менелаева правила шести количествъ“, какъ поступали раньше, а изъ „правила четырехъ количествъ“. Правило это таково: если PP_1 и QQ_1 суть двѣ дуги большихъ круговъ, пересѣкающихся въ точкѣ A, а PQ и P_1Q_1 дуги большихъ круговъ, проведенныя перпендикулярно къ QQ_1, то имѣетъ мѣсто слѣдующая пропорція:

$$\sin AP : \sin PQ = \sin AP_1 : \sin P_1Q_1.$$

Это отступленіе отъ введеннаго Птолемеемъ и освященнаго

временемъ пріема приписывали прежде арабскому математику *Джâбиръ ибнъ Афлахъ*, но въ послѣднее время изученіе арабскихъ рукописей показало, что переходъ отъ „правила шести количествъ“ къ „правилу четырехъ количествъ“ былъ, вѣроятно, сдѣланъ еще математикомъ *Тâбитъ ибнъ Куррахъ*[1]) (836—901); эта реформа принята была другими писателями, предшествовавшими Джâбиру ибнъ Афлахъ[2]).

Первое мѣсто между астрономами девятаго вѣка занималъ *Аль Баттâнû*, котораго по-латыни стали называть *Albategnius*. Онъ былъ родомъ изъ Баттана въ Сиріи. Его сочиненіе *De scientia stellarum* было переведено на латинскій языкъ *Платономъ Тибуртинскимъ* въ двѣнадцатомъ вѣкѣ. Въ этомъ переводѣ арабское слово *джûба*, отъ санскритскаго *джûва*, какъ говорятъ, было передано словомъ *sinus*; таково происхожденіе этого слова. Аль Баттâнû, хотя и изучалъ прилежно Птолемея, однако, не слѣдовалъ ему вполнѣ. Аль Баттâнû сдѣлалъ значительный шагъ впередъ, введя индійскій „синусъ“, или *половину* хорды, вмѣсто *цѣлой* хорды, какъ у Птолемея. Другое усовершенствованіе, введенное арабами въ греческую тригонометрію, указываетъ также на индійское вліяніе: дѣйствія и предложенія, которыя греки излагали въ геометрической формѣ, выражаются арабами алгебраически. Такъ Аль Баттâнû сразу находитъ значеніе Θ изъ уравненія $\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = D$ съ помощью формулы $\sin\Theta = D \div \sqrt{1+D^2}$,—процессъ, неизвѣстный древнимъ греческимъ геометрамъ[3]). Къ формуламъ, извѣстнымъ Птолемею, онъ прибавляетъ собственную важную формулу для рѣшенія косоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, а именно: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Большое значеніе имѣютъ также изслѣдованія *Абу'ль Уафâ*. Онъ изобрѣлъ методъ вычисленія таблицы синусовъ,

---

[1]) *H. Suter*, въ Biblioth. Mathem., 1893, p. 7.

[2]) Изложеніе вывода формулъ для прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ по Птолемею, также по Джâбиру ибнъ Афлахъ и его арабскимъ предшественникамъ, см. у *Ганкеля*, pp. 285—287; *Cantor*, I, 749.

[3]) *Cantor*, I, p. 694.

дающій синусъ полуградуса съ точностью до девятаго десятичнаго знака [1]). Ему принадлежитъ честь введенія новой тригонометрической функціи *тангенса*, а также вычисленіе таблицы тангенсовъ. Первый шагъ къ этому сдѣланъ былъ *Аль Баттанй.* Важныя измѣненія въ методѣ произвели впервые *Джабиръ ибнъ Афлахъ* въ Севильѣ въ Испаніи (во второй половинѣ одиннадцатаго вѣка) и *Насиръ Эддинъ* (1201—1274) въ отдаленной Персіи. Въ трудахъ послѣднихъ двухъ авторовъ мы находимъ впервые разработку тригонометріи, какъ отдѣльной части чистой математики, независимо отъ астрономіи.

Мы не хотѣли бы входить въ большія подробности, но должны подчеркнуть тотъ фактъ, что *Насиръ Эддинъ* на далекомъ Востокѣ, въ періодъ временнаго прекращенія военныхъ завоеваній татарскихъ правителей, разработалъ въ значительной степени какъ плоскую, такъ и сферическую тригонометрію. Зутеръ [2]) съ энтузіазмомъ спрашиваетъ, что осталось бы дѣлать европейскимъ ученымъ пятнадцатаго столѣтія въ области тригонометріи, если бы они знали объ этихъ изслѣдованіяхъ? А можетъ быть, нѣкоторые изъ нихъ и были знакомы съ этими изысканіями? На этотъ вопросъ мы пока не можемъ дать окончательнаго отвѣта.

Европа въ средніе вѣка.

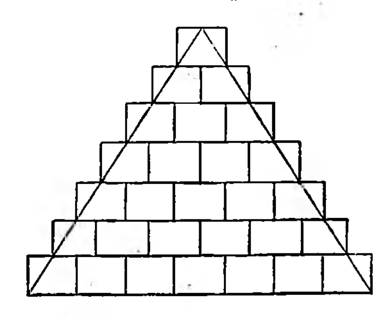
Введеніе Римской геометріи. Нельзя сказать, чтобы до введенія арабской науки въ Европу геометрическія познанія на Западѣ превосходили познанія египтянъ въ 600 году до Р. Х. Кромѣ опредѣленій треугольника, четыреугольника, круга, пирамиды и конуса (какъ они даны были въ римской энциклопедіи карѳагенянина Марціана Капеллы) и простыхъ правилъ землемѣрія, средневѣковые монахи знали не много. Въ „Задачахъ для изощренія ума“ *Алькуина* площади тре-

---

[1]) См. *Cantor,* I, 702—704.

[2]) Дальнѣйшія подробности см. въ его статьѣ въ Biblioth Mathem, 1893, pp. 1—8.

угольныхъ и четыреугольныхъ участковъ земли находятся съ помощью тѣхъ же приближенныхъ формулъ, которыми пользовались и египтяне, и которыя даны въ геометріи Боэтія: четыреугольникъ равенъ произведенію полусуммъ противуположныхъ сторонъ; треугольникъ равенъ произведенію полусуммы двухъ сторонъ на половину третьей. Послѣ Алькуина великимъ математическимъ свѣтиломъ Европы былъ Гербертъ (ум. въ 1003 г.). Въ Мантуѣ онъ нашелъ геометрію Боэтія и принялся ревностно изучать ее. Обыкновенно полагаютъ, что Гербертъ самъ былъ авторомъ геометріи. Книга, извѣстная подъ названіемъ геометріи Герберта, не содержитъ ничего, кромѣ геометріи Боэтія, но тотъ фактъ, что нѣкоторыя ошибки, встрѣчающіяся у Боэтія, исправлены въ этой книгѣ, показываетъ что авторъ ея хорошо усвоилъ излагаемый имъ предметъ[1]). „Самая ранняя математическая работа, заслуживающая этого названія — это письмо Герберта къ Адальбольду, епископу Утрехтскому“ [2]), въ которомъ объяснено, почему площадь треугольника, найденная „геометрически“, посредствомъ умноженія основанія на высоту, отличается отъ площади, вычисленной „ариѳметически“ по принятой у землемѣровъ формулѣ $\frac{1}{2}a(a+1)$, гдѣ a означаетъ сторону равносторонняго треугольника. Гербертъ даетъ правильное объясненіе, а именно состоящее въ томъ, что въ упомянутой формулѣ всѣ малые квадраты, на которые треугольникъ предполагается раздѣленнымъ, считаются полностью, тогда какъ нѣкоторые изъ нихъ лежатъ отчасти внѣ треугольника.



Переводъ арабскихъ рукописей. Начало двѣнадцатаго столѣтія было эпохой большого умственнаго возбужденія.

---

[1]) Описаніе содержанія этой книги см. у *Кантора,* I, 811—814; *S. Günther,* Geschichte des Mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter, Berlin, 1887, pp. 115—120.

[2]) *Hankel,* p. 314.

Философы томились желаніемъ узнать объ Аристотелѣ больше того, что можно было узнать по сочиненіямъ Боэтія; математики жаждали пріобрѣсти болѣе глубокія математическія познанія. У европейцевъ не было подъ руками греческихъ текстовъ; поэтому они стали учиться у магометанъ; въ это время арабы считались самыми учеными людьми на свѣтѣ. Мы читаемъ о томъ, какъ одинъ англійскій монахъ, *Ателардъ изъ Бата (Athelard of Bath)*, много путешествовалъ по Малой Азіи, Египту и Испаніи, презирая тысячи опасностей, лишь бы освоиться съ языкомъ и наукой магометанъ. „Мавританскіе университеты въ Кордовѣ, въ Севильѣ и Гранадѣ были опасными мѣстами пребыванія для христіанъ". Ателардомъ былъ сдѣланъ, вѣроятно, самый ранній переводъ Евклидовыхъ *Началъ* съ арабскаго языка на латинскій [1]), въ 1120 г. Онъ перевелъ также астрономическія таблицы Мухаммеда ибнъ Мусâ Альхуаризмû. Есть, однако, основаніе предполагать, что въ своемъ переводѣ Евклида съ арабскаго языка Ателардъ пользовался болѣе раннимъ латинскимъ переводомъ [2]).

---

[1]) Мы съ удивленіемъ читаемъ въ Dictionary of National Biography (Leslie Stephen's) такую фразу: „до сихъ поръ не установлено, сдѣланъ ли былъ переводъ Евклидовыхъ *Началъ*.... съ арабской версіи или съ подлинника". Насколько намъ извѣстно, ни одинъ историкъ математики не сомнѣвается въ настоящее время въ томъ, что переводъ былъ сдѣланъ съ арабскаго языка, и что Ателардъ не пользовался греческимъ текстомъ. См. *Cantor*, I, 670, 852; II, 91. *Hankel*, p. 335; *S. Günther*, Math. Unt. im d. Mittelalt., pp. 147—149; *W. W. R. Ball*, 1893, p. 170; *Gow*, p. 206; *H. Suter*, Gesch. d. Math. 1, 146; *Hoefer*, Histoire des Mathématiques, 1879, p. 321. Замѣчательно, что *Marie*, въ своей 12-томной исторіи математики, даже не упоминаетъ объ Ателардѣ. Онъ говоритъ, что Кампанъ, „a donné des *Éléments* d'Euclide la première traduction qu'on ait eue en Europe". *Marie*, II, p. 158.

[2]) *Cantor*, II, 91—92. Въ одной геометрической рукописи въ Британскомъ музеѣ сказано, что геометрію изобрѣлъ въ Египтѣ Eucleides. Затѣмъ слѣдуютъ стихи:

„Thys craft com ynto England, as y ghow say,
Yn tyme of good Kyng Adelstones day".

(Это искусство появилось, какъ говорятъ, въ Англіи въ дни добраго короля Адельстона). См. *Halliwell*, Rara Mathematica, London 1841, p.

Всѣ важнѣйшія математическія работы грековъ были переведены на арабскій языкъ. *Герардъ Кремонскій* (изъ Кремоны въ Ломбардіи) отправился въ Толедо и тамъ въ 1175 г. перевелъ *Альмагестъ*. Говорятъ, что онъ перевелъ на латинскій языкъ 70 сочиненій, въ томъ числѣ 15 книгъ Евклида, Евклидовы *Data*, *Sphaerica* Ѳеодосія и сочиненіе Менелая. Новый переводъ Евклидовыхъ *Началъ* сдѣланъ около 1260 г. *Giovanni Campano* (въ латинизованной формѣ *Campanus*) изъ Новары въ Италіи. Переводъ этотъ вытѣснилъ предшествовавшіе ему переводы и былъ положенъ въ основаніе печатныхъ изданій.

Первое Возрожденіе. Центральной фигурой въ исторіи математики въ этотъ періодъ является даровитый *Леонардо изъ Пизы* (1175—?). Главныя его изысканія относятся къ алгебрѣ, но въ сочиненіи *Practica Geometriae,* вышедшемъ въ 1220 г., онъ обнаруживаетъ искусство и въ геометріи, а также и геометрическую строгость. Ему были извѣстны сочиненія Евклида и нѣкоторыхъ другихъ греческихъ ученыхъ или непосредственно по арабскимъ рукописямъ, или по переводамъ, сдѣланнымъ его соотечественниками Герардомъ Кремонскимъ и Платономъ изъ Тиволи. Леонардо даетъ изящныя доказательства „Героновой формулы“ и того предложенія, что медіаны треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ (предложенія, извѣстнаго Архимеду, но не доказаннаго имъ). Онъ также даетъ ту теорему, что квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его сторонъ [1]). Онъ рѣшаетъ съ помощью алгебры задачи, подобныя слѣдующей: вписать въ равносторонній треугольникъ квадратъ, покоящійся на основаніи треугольника.

Около того же времени монахъ *Jordanus Nemorarius* въ Германіи написалъ геометрическое сочиненіе, подобное тому, которое вышло въ Италіи изъ подъ пера Леонардо.

56, etc. **Такъ какъ король Ательстанъ жилъ лѣтъ за 200 до Ателарда то слѣдовало бы полагать, что Латинскій Евклидъ (можетъ быть, только отрывки, данныя у Боэтія) былъ извѣстенъ въ Англіи задолго до Ателарда.**

[1]) *Cantor*, II, p. 35.

Оно было озаглавлено *De triangulis*. Курце напечаталъ его въ 1887 г. Сочиненіе это рѣшительно удаляется отъ греческихъ образцовъ, хотя авторъ его часто ссылается на Евклида. Ничто не указываетъ на то, чтобы книга эта когда-либо употреблялась въ качествѣ учебнаго руководства въ школахъ. Это сочиненіе, какъ и книга Леонардо, читалась, вѣроятно, только избранными математиками того времени. Мы приведемъ для примѣра слѣдующія замѣчательныя теоремы изъ этого сочиненія: если въ неправильный многоугольникъ можно вписать и около него описать круги, то центры этихъ круговъ не совпадаютъ; изъ всѣхъ вписанныхъ треугольниковъ съ общимъ основаніемъ равнобедренный треугольникъ—наибольшій. Іорданъ выполняетъ трисекцію угла, сообщая *градуированной* линейкѣ вращательное и въ тоже время поступательное движеніе, при чемъ конечное положеніе ея опредѣляется извѣстной длиной, отмѣченной на линейкѣ [1]). Въ этомъ построеніи онъ не позволяетъ ограничивать себя Евклидовыми постулатами, которые допускаютъ только пользованіе простой, не отмѣченной дѣленіями линейкой и циркулемъ. Онъ вводитъ также движеніе частей фигуры по примѣру нѣкоторыхъ арабскихъ авторовъ. Такое движеніе чуждо Евклидову обычаю [2]). Тотъ же способъ трисекціи данъ былъ и Кампаномъ.

Іорданова попытка найти точную квадратуру круга понижаетъ наше мнѣніе о немъ, какъ о математикѣ. Математики стали живо интересоваться задачей о квадратурѣ круга, привлекавшей въ это время ихъ вниманіе. Ихъ усилія оставались столь же безплодными, какъ если бы они собирались схватить радугу; въ тотъ моментъ, когда, казалось имъ, они достигали цѣли, она исчезала, точно по волшебству, и оказывалась столь же отдаленной, какъ и прежде. Въ своемъ возбужденіи нѣкоторые изъ нихъ подпадали подъ вліяніе умственнихъ иллюзій и воображали, что они дѣйствительно добились своего; въ своемъ воображеніи они проходили подъ тріумфальной аркой, стяжали славу, удивленіе и восхищеніе всего свѣта...

---

[1]) *Cantor*, II, 75, подробно излагаетъ это построеніе.

[2]) Болѣе подробныя извлеченія изъ *De triangulis* см. у *Кантора*, II, 67—79; *S. Günther*, op. cit., 160—162.

Въ четырнадцатомъ и пятнадцатомъ вѣкахъ не было геометровъ, равныхъ Леонардо изъ Пизы. О математикѣ писали много и дѣлали попытки разобраться въ богатомъ матеріалѣ, пріобрѣтенномъ у арабовъ. Но ничего существеннаго къ геометріи не прибавили.

Англійская рукопись по землемѣрію, четырнадцатаго вѣка, носитъ заглавіе: *Nowe sues here a Tretis of Geometri wherby you may knowe the heghte, depnes, and the brede of most what erthely thynges* [1]) (т. е. Трактатъ геометріи, съ помощью котораго можно опредѣлять размѣры большинства земныхъ предметовъ). Старѣйшая французская геометрическая рукопись (около 1275 г.) также анонимна. Какъ и въ англійскомъ трактатѣ, въ ней говорится о землемѣріи. Изученіе рукописей, найденныхъ и изслѣдованныхъ до сихъ поръ, заставляетъ предполагать, что съ тринадцатаго столѣтія землемѣріе въ Европѣ отошло отъ римскихъ образцовъ и вполнѣ подпало подъ вліяніе греко-арабскихъ писателей [2]).

Выдающимся писателемъ этого времени является *Θома Брадвардинъ (Thomas Bradwardine*, 1290?—1349), архіепископъ Кантерберійскій. Онъ воспитывался въ Мертонъ Колледжѣ въ Оксфордѣ и потомъ читалъ въ Оксфордскомъ университетѣ лекціи по богословію, философіи и математикѣ. Его философскія сочиненія содержатъ остроумныя разсужденія о безконечно-большомъ и безконечно-маломъ. Съ этого времени предметы эти стали изучать въ связи съ математикой. Брадвардинъ написалъ нѣсколько математическихъ трактатовъ. Сочиненіе, озаглавленное *Geometria speculativa*, было напечатано въ Парижѣ въ 1511 г., какъ трудъ Брадвардина; нѣкоторые приписывали его, однако, нѣкоему датчанину, по имени *Петру*, жившему тогда въ Парижѣ. Это замѣчательное сочиненіе пользовалось широкой извѣстностью. Въ немъ говорится о правильныхъ тѣлахъ, объ изопериметрическихъ фигурахъ на манеръ Зенодора, и о звѣздчатыхъ многоугольникахъ. Такіе многоугольники появились впервые у Пиθагора и его учениковъ. Пятиугольная звѣзда служила Пиθагорейцамъ

1) См. *Halliwell*, Rara Mathematica, 56—71; *Cantor*, II, p. 101.
2) *Cantor*, II, 215.

примѣтой, или символомъ, по которому они узнавали другъ друга, и носила у нихъ названіе Здоровье [1]). Мы встрѣчаемъ затѣмъ такіе многоугольники въ геометріи Боэтія, въ переводахъ Евклида съ арабскаго языка на латинскій, сдѣланныхъ Ателардомъ изъ Бата и Кампаномъ, и въ упомянутомъ выше древнѣйшемъ французскомъ геометрическомъ трактатѣ. Брадвардинъ, излагаетъ нѣкоторыя геометрическія свойства звѣздчатыхъ многоугольниковъ—говоритъ объ ихъ построеніи и о суммѣ ихъ угловъ. Мы снова встрѣчаемъ эти обаятельныя фигуры у Регіомонтана, у Кеплера и другихъ.

На Брадвардина и на немногихъ другихъ британскихъ ученыхъ англичане съ гордостью ссылаются, какъ на первыхъ европейскихъ писателей по тригонометріи. Ихъ сочиненія содержатъ тригонометрію, заимствованную изъ арабскихъ источниковъ. Джонъ Модисзъ (John Maudith), бывшій профессоромъ въ Оксфордѣ около 1340 года, говоритъ объ *umbra* („тангенсъ"); Брадвардинъ употребляетъ термины *umbra recta* („котангенсъ") и *umbra versa* („тангенсъ"). Мы встрѣчаемся здѣсь съ новой функціей. Индусы ввели *синусъ, синусъ верзусъ, косинусъ;* арабы—*тангенсъ;* англичане прибавили теперь *котангенсъ* [2]).

Быть можетъ, величайшимъ результатомъ введенія арабской учености было основаніе университетовъ. Каково было отношеніе ихъ къ математикѣ? Въ Парижскомъ университетѣ геометрія была въ пренебреженіи. Въ 1336 году было введено правило, въ силу котораго ни одинъ студентъ не могъ получить ученой степени, не прослушавши предварительно лекцій по математикѣ, а, какъ видно изъ комментарія на шесть первыхъ книгъ Евклида, изданнаго въ 1536 г., кандидаты на степень магистра свободныхъ искусствъ должны были приносить присягу въ томъ, что они прослушали курсъ лекцій, относящійся къ этимъ книгамъ [3]). Экзамены, если они вообще производились, не простирались, вѣроятно,

[1]) *Gow*, p. 151.

[2]) *Cantor*, II, p. 101.

[3]) *Hankel*, pp. 354—359. Мы справлялись также съ сочиненіями *H. Suter*, Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters, Zürich, 1887; *S. Günther*, Math. Unt. im d. Mittelalt., p. 199; *Cantor*, II, pp. 127—130.

дальше первой книги, какъ показываетъ прозвище „magister matheseos“, данное послѣднему предложенію этой книги — Пиѳагоровой теоремѣ. Въ Пражскомъ университетѣ, основанномъ въ 1384 г., астрономія и прикладная математика считались дополнительными предметами. Роджеръ Бэконъ, писавшій почти въ концѣ тринадцатаго вѣка, говоритъ, что въ Оксфордѣ только немногіе студенты заботились о томъ, чтобы знать больше трехъ или четырехъ предложеній Евклида, и что по этой причинѣ пятое предложеніе получило названіе „elefuga“, т. е. „бѣгство убогихъ“. Говорятъ, что это пятое предложеніе позднѣе стало называться „pons asinorum“, или „ослинымъ мостомъ“ [1]). Клавій въ своемъ изданіи Евклида, 1591 года, говоритъ объ этой теоремѣ, что начинающіе находятъ ее трудной вслѣдствіе большого числа встрѣчающихся въ ней линій и угловъ, къ которымъ они еще не привыкли *). Эти послѣднія слова, безъ сомнѣнія, указываютъ на ту причину, по которой изученіе геометріи было, повидимому, обречено на такое жалкое безплодіе. Учащіеся, не имѣвшіе никакой математической подготовки, не умѣвшіе, можетъ быть, производить самыхъ простыхъ ариѳметическихъ выкладокъ, начинали съ заучиванія наизусть отвлеченныхъ опредѣленій и теоремъ Евклида. Жалкой подготовкой и жалкимъ обученіемъ, въ соединеніи съ отсутствіемъ строгихъ требованій для полученія степеней, вѣроятно, и можно объяснить это бѣгство отъ геометріи — эту „elefuga“. Въ срединѣ пятнадцатаго столѣтія въ Оксфордѣ читались двѣ первыя книги Евклидовыхъ Началъ.

Такимъ образомъ, видно, что университеты лишь съ малымъ усердіемъ поддерживали изученіе математическихъ наукъ.

---

[1]) Это прозвище дается иногда и Пиѳагоровой теоремѣ, I, 47, хотя обыкновенно 47 предложеніе первой книги Евклида называютъ „вѣтряной мельницей“. Слѣдуетъ прочесть поэму *Т. Кэмпбелля* (*Thomas Campbell*) „The Pons Asinorum“.

*) „Равнобедренныхъ треугольниковъ углы при основаніи взаимно равны; естьли продолжить равныя прямыя, то и углы подъ основаніемъ взаимно равны“. *Эвклидовыхъ Началъ восемь книгъ* въ перев. *Петрушевскаго*. Предложеніе V, стр. 11. *Прим. ред.*

НОВОЕ ВРЕМЯ

Ариѳметика

Развитіе ея, какъ науки и искусства

Въ теченіе шестнадцатаго вѣка человѣческій умъ дѣлалъ необычайныя усилія для того, чтобы добиться свободы отъ схоластическихъ и церковныхъ оковъ. Эта независимая и могучая умственная дѣятельность отразилась на математическихъ книгахъ того времени. Лучшіе ариѳметическіе труды какъ въ пятнадцатомъ, такъ и въ шестнадцатомъ столѣтіи вышли изъ-подъ пера итальянскихъ писателей — Луки Пачіоли и Тартальи. *Лука Пачіоли* (1445? — 1514?), называемый также *Lucas di Burgo, Luca Paciuolo* или *Pacciuolus,* — былъ тосканскимъ монахомъ, преподававшимъ математику въ Перуджіи, Неаполѣ, Миланѣ, Флоренціи, Римѣ и Венеціи. Его трактатъ *Summa de Arithmetica*, 1494, содержитъ въ себѣ всѣ извѣстныя въ его дни свѣдѣнія по ариэметикѣ, алгебрѣ и тригонометріи; это первый сборникъ подобнаго рода, появившійся послѣ сочиненія Фибоначи *liber abaci;* въ немъ, однако, кромѣ того, что уже есть у Фибоначи, жившаго тремя столѣтіями раньше, мы находимъ мало важныхъ свѣдѣній.

Настоящее имя *Тартальи* было *Nicolo Fontana* (1500?— 1557). Когда онъ былъ мальчикомъ шести лѣтъ, французскій солдатъ нанесъ Николо жестокую рану, которая на всю жизнь лишила его способности свободно говорить. За это и прозванъ онъ былъ Tartaglia, т. е. заика. Его оставшаяся вдовою мать была слишкомъ бѣдна, чтобы платить за его обученіе въ школѣ; однако, онъ безъ помощи учителя научился читать и пріобрѣлъ знаніе латинскаго и греческаго языковъ и математики. Обладая умомъ необычайной силы,

Тарталья уже въ раннемъ возрастѣ въ состоянiи былъ преподавать математику. Онъ училъ въ Веронѣ, Пьяченцѣ, Венецiи и Брешiи. Свои оригинальныя изслѣдованiя онъ собирался помѣстить въ большомъ сочиненiи, *General trattato di numeri et misure,* которое не успѣлъ кончить до своей смерти. Первыя двѣ части были изданы въ 1556 г.; въ нихъ говорится объ ариѳметикѣ. Изложенiе коммерческой ариѳметики у Тартальи, нѣсколько похожее на изложенiе ея у Пачiоли, отличается, однако, большей полнотой, простотой и методичностью. Его сочиненiя содержатъ большое число упражненiй и задачъ, расположенныхъ такъ, чтобы обезпечить читателю хорошее знанiе одного предмета прежде, чѣмъ онъ перейдетъ къ изученiю другого. Тарталья никогда не забываетъ о потребностяхъ практика. Его описанiя дѣйствiй надъ числами содержатъ семь различныхъ способовъ умноженiя и три метода дѣленiя [1]). Онъ даетъ таблицу венецiанскихъ вѣсовъ и мѣръ.

Изученiе математики поддерживалось въ Германiи въ концѣ пятнадцатаго столѣтiя *Георгомъ Пурбахомъ* и его ученикомъ *Регiомонтаномъ*. Первая печатная ариѳметика появилась въ 1482 г. въ Бамбергѣ. Ее написалъ *Ulrich Wagner,* вычислитель практикъ въ Нюрнбергѣ. Она была напечатана на пергаментѣ, но отъ этого изданiя дошли до насъ только открывки одного экземпляра [2]). Въ 1483 г. тѣ же самые бамбергскiе издатели выпустили въ свѣтъ вторую ариѳметику, напечатанную на бумагѣ и содержащую 77 страницъ. Это сочиненiе анонимно, но полагаютъ, что его написалъ Ульрихъ Вагнеръ. Достойно замѣчанiя то обстоятельство, что первая печатная нѣмецкая ариѳметика появилась въ томъ же году, что и первая итальянская ариѳметика. Бамбергская ариѳметика 1483 г., говоритъ Унгеръ, совершенно не похожа на предшествующiе ей латинскiе трактаты, она чисто коммерческая. По тому же образцу Johann Widmann написалъ затѣмъ ариѳметику, которая была издана въ Лейпцигѣ въ 1489 г. Это сочиненiе сдѣлалось знаменитымъ,

---

[1]) *Unger,* p. 60.
[2]) *Unger,* p.p. 36—40.

какъ первая книга, въ которой встрѣчаются символы + и —. Они встрѣчаются въ связи съ задачами, которыя рѣшаются посредствомъ „ложнаго положенія“. Видманъ говоритъ, „что такое —, это минусъ; что такое +, это больше“. Слово „минусъ “и „больше“, или „плюсъ“, встрѣчаются задолго до Видманова времени въ сочиненіяхъ Леонардо изъ Пизы, который употребляетъ ихъ въ связи съ методомъ ложнаго положенія въ смыслѣ „положительной ошибки“ и „отрицательной ошибки“ [1]). Тогда какъ слово „минусъ“ Леонардо употребляетъ также для обозначенія дѣйствія (вычитанія), онъ не употребляетъ слова „плюсъ“ въ подобномъ же смыслѣ. Такъ, вмѣсто 7+4 онъ пишетъ „septem et quatuor“. Слово „плюсъ“, какъ означающее дѣйствіе сложенія, было впервые найдено Энестремомъ въ итальянской алгебрѣ четырнадцатаго столѣтія. Словами „plus“ и „minus“ или равнозначащими имъ словами новыхъ языковъ пользовались Пачіоли, Шюке и Видманъ. Что касается знаковъ + и —, то не представляется невѣроятнымъ то предположеніе, что они служили сначала простыми сокращеніми „plus“ и „minus“, что это лишь измѣненныя формы буквъ *p* и *m*. Этими знаками пользовался въ Италіи Леонардо да Винчи очень скоро послѣ появленія ихъ въ сочиненіи Видмана. Ихъ употреблялъ Grammateus (Heinrich Schreiber), преподаватель Вѣнскаго университета, Christoff Rudolff въ своей алгебрѣ 1525 года и Stifel въ 1553 году. Такимъ образомъ, мало-по-малу они вошли во всеобщее употребленіе.

Въ теченіе первой половины шестнадцатаго столѣтія нѣкоторые изъ наиболѣе выдающихся нѣмецкихъ математиковъ (Грамматеусъ, Рудольфъ, Апіанъ, Штифель) приложили свои труды къ составленію руководствъ по практической ариѳметикѣ, но послѣ этого періода эта важная работа перешла въ руки исключительно вычислителей-пра-

---

[1]) *G. Eneström* въ l'Intermédiaire des Mathématiciens, 1894, pp. 119—120. О предполагаемомъ происхожденіи знаковъ + и — см. также *Eneström* въ Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, 1894, pp. 243—256; *Cantor*, II, 211—212; *De Morgan* въ Philosophical Magazine, 20, 1842, pp. 135—137; въ Trans. of the Philos. Soc. of Cambridge, 11, 1866, 203—212.

ктиковъ[1]). Самымъ популярнымъ составителемъ руководствъ въ это время былъ *Adam Riese*, который издалъ нѣсколько ариѳметикъ; его имя связываютъ, однако, обыкновенно съ ариѳметикой, напечатанной въ 1522 году.

Мы упомянемъ еще объ одномъ французскомъ сочиненіи, которое по своимъ достоинствамъ можетъ быть поставлено на ряду съ книгой Пачіоли *Summa de Arithmetica;* его написалъ въ Ліонѣ въ 1484 году *Nicolas Chuquet;* это сочиненіе *Le Triparty en la science des nombres* было напечатано, однако, только въ девятнадцатомъ столѣтіи [2]). Современникомъ Шюкэ во Франціи былъ *Jacques Lefèvre,* который выпустилъ въ свѣтъ нѣсколько печатныхъ изданій старыхъ математическихъ книгъ. Такъ, напримѣръ, въ 1496 году появилась въ печати ариѳметика, составленная по образцу ариѳметики Боэтія; авторъ этой книги нѣмецкій монахъ *Jordanus Nemorarius* написалъ ее больше, чѣмъ за два столѣтія до того времени. На четверть столѣтія позже, въ 1520 году, появилась популярная французская ариѳметика, авторъ которой *Estienne de la Roche* носилъ также имя *Villefranche.* Этотъ авторъ заимствовалъ матеріалъ для своего сочиненія, главнымъ образомъ, у Шюкэ и Пачіоли[3]).

Мы перейдемъ теперь къ разбору нѣкоторыхъ отдѣльныхъ ариѳметическихъ вопросовъ. До самаго семнадцатаго столѣтія нумерація большихъ чиселъ была очень разнообразна и неуклюжа. Итальянскіе авторы группировали единицы различныхъ разрядовъ въ періоды по шести, другіе группировали ихъ иногда по три. Адамъ Ризэ, который сдѣлалъ больше чѣмъ кто-либо, въ первой половинѣ шестнадцатаго столѣтія, для распространенія знанія ариѳметики въ Германіи,

пишетъ 86 789 325 178 и читаетъ это такъ: „Sechs und achtzig tausend, tausend mal tausend, sieben hundert tausend mal tausend, neun vnnd achtzig tausend mal tausend, drei hundert tausent, fünff vnnd zwantzig tausend, ein hundert,

---

1) *Unger,* p. 44.

2) Triparty напечатано въ Bulletino Boncompagni, XIII, 585 — 592. Описаніе этого сочиненія дано у *Кантора,* II, 318 — 334.

3) *Cantor,* II, p. 341.

acht und siebentzig“ [1]). Штифель въ 1544 году пишетъ 2· 329· 089· 562· 800 и читаетъ: „duo millia millies millie millies; trecenta viginti novem millia millies millies; octoginta novem millia millies; quingenta sexaginta duo millia; octingenta“. Tonstall въ 1522 году называетъ 10^9 „millies millena millia“ [2]). Этотъ обычай группировать единицы различныхъ разрядовъ, для цѣли нумераціи, не существовалъ у индусовъ. У нихъ было отдѣльное названіе для единицъ каждаго изъ послѣдовательныхъ разрядовъ; замѣчено, что это, вѣроятно, помогло имъ придти къ мысли о принципѣ помѣстнаго значенія. Они читаютъ 86789325178 слѣдующимъ образомъ 8 кхарва, 6 падма, 7 віарбуда, 8 кôти, 9 праіута, 3 лакша, 2 аіута, 5 сахасра, 1 сата, 7 дасонъ, 8 [3]). Противъ это индусской системы можно съ большимъ основаніемъ возразить, что она обременяетъ память слишкомъ большимъ числомъ названій.

Первымъ усовершенствованіемъ, внесеннымъ въ древніе и средневѣковые методы нумераціи, было изобрѣтеніе итальянцами слова *millione* въ четырнадцатомъ столѣтіи для обозначенія *большой тысячи* [4]), или 1000^2. Это новое слово обозначало, повидимому, первоначально конкретную мѣру, 10 бочонковъ золота [5]). Слова *millione, nulla* или *cero* (zero) встрѣчаются первый разъ въ печати въ сочиненіи Пачіоли [6]). Въ теченіе слѣдующихъ двухъ столѣтій употребленіе слова *millione* распространилось и въ другихъ европейскихъ странахъ. Тонсталль въ 1522 году говоритъ объ этомъ терминѣ, какъ объ общераспространенномъ въ Англіи, но отвергаетъ его, считая это слово варварскимъ! Седьмое

---

[1]) *Wildermuth*, статья „Rechnen“ въ Encyklopaedie des gesammten Erziehungs-und Unterrichtswesens, *Dr. K. A. Schmid*, 1885, p. 794.

[2]) *Peacock*, p. 426.

[3]) *Hankel*, p. 15 *).

*) Старая индусская система устной нумераціи подробно описана въ сочиненіи объ Индіи арабскаго писателя XI вѣка Альбируни; см. мемуаръ *Woepcke* о распространеніи индійскихъ цифръ, Journal Asiatique 1863 года, VI ser., t. I, pp. 274—290, 442—448. *Прим. ред.*

[4]) *Peacock*, p. 378.

[5]) *Hankel*, p. 14.

[6]) *Cantor*, II, 284.

мѣсто нумераціи онъ называетъ „millena millia; vulgus millionem barbare vocat“ [1]). Ducange [*]) упоминаетъ слово *million* въ 1514 году [2]); въ 1540 году оно встрѣчается однажды въ ариѳметикѣ Кристофа Рудольфа.

Слѣдующимъ рѣшительнымъ шагомъ впередъ было введеніе словъ *билліонъ*, *трилліонъ* и т. д. Ихъ происхожденіе относится почти къ тому же времени, когда впервые стали употреблять слово *милліонъ*. Насколько извѣстно, они встрѣчаются впервые въ рукописномъ сочиненіи по ариѳметикѣ даровитаго французскаго ученаго, о которомъ мы уже говорили, ліонскаго врача *Николая Шюкэ*. Онъ употребляетъ слова *byllion, tryllion, quadrillion, quyllion, sixlion, septyllion, octyllion, nonyllion,* „et ainsi des aultres se plus oultre on voulait proceder“, для обозначенія второй, третьей и т. д. степеней *милліона,* т. е. $(1\,000\,000)^2$, $(1\,000\,000)^3$ и т. д. [3]). Очевидно, Шюкэ разрѣшилъ трудный вопросъ о нумераціи. Новыя слова, употребленныя имъ, появляются въ 1520 году въ печатномъ сочиненіи *Ла Роша*. Такимъ образомъ, великая честь упрощенія нумераціи большихъ чиселъ принадлежитъ, повидимому, Франціи. Въ Англіи и Германіи новая номенклатура была введена только около полутора столѣтія спустя. Въ Англіи слова *билліонъ, трилліонъ* и т. д. считались новыми, когда писалъ Loккъ, т. е. около 1687 года [4]). Въ Германіи эти новые термины появились впервые въ 1681 году въ сочиненіи *Гекkенберга* изъ Гановера, но они вошли во всеобщее употребленіе только въ восемнадцатомъ вѣкѣ [5]).

---

[1]) *Peacock*, p. 426.

[*]) т. е. словарь *Дюканжа:* Glossarium mediae et infimae latinitatis cum supplem. Carpenterii, Adelungii et aliorum; см. изд. Геншеля (G. A. L. Henschel), t. IV, Paris, 1845, подъ сл. *Millio* цитату изъ Хартіи 1514, заимств. изъ сочин. *Th. Rymer*. Foedera, conventiones, litterae etc. inter reges Angliae et alios quosvis imperatores, reges, ... ab anno 1101 ad nostra usque tempora habita aut tractata, Londini 1704—35 (ed. tert. Hagae — Comitum 1745), t. 13, p. 409. *Прим. ред.*

[2]) *Wildermuth.*

[3]) *Cantor*, II, 319.

[4]) *Locke*. Human Understanding, Chap. XVI.

[5]) *Unger*, p. 71.

Около середины семнадцатаго столѣтія во Франціи вошло въ обыкновеніе раздѣлять числа на періоды по три цифры въ каждомъ вмѣсто шести, при чемъ слово *билліонъ* вмѣсто стараго значенія $(1\,000\,000)^2$, или 10^{12}, получило новое значеніе 10^9 [1]). Слова *трилліонъ, квадрилліонъ* и т. д. стали означать теперь 10^{12}, 10^{15} и т. д. Въ настоящее время слова *билліонъ, трилліонъ* и т. д. означаютъ во Франціи и въ другихъ южно-европейскихъ странахъ, а также и въ Соединенныхъ Штатахъ (съ первой четверти XIX столѣтія), 10^9, 10^1 и т. д., тогда какъ въ Германіи, Англіи и въ другихъ сѣверно-европейскихъ странахъ они обозначаютъ 10^{12}, 10^{18} и т. д. Изъ сказаннаго видно, что, хотя арабское обозначеніе цѣлыхъ чиселъ было доведено до совершенства индусами еще въ шестомъ столѣтіи, наша теперешняя устная нумерація восходитъ только къ концу пятнадцатаго столѣтія. Одно изъ преимуществъ арабской системы обозначенія — ея независимость отъ устной нумераціи. Въ настоящее время нумерація, хотя и пригодна для практическихъ цѣлей, но не вполнѣ еще развита. Чтобы прочесть число, состоящее скажемъ, изъ 1000 цифръ, или прочесть значеніе π, вычисленное до 707 десятичныхъ знаковъ Вилліамомъ Шенксомъ, мы должны были бы изобрѣсти новыя слова.

Хорошая нумерація, сопровождаемая хорошей системой обозначенія, существенно важна для искусства вычисленія. Говорятъ, что янкосы на Амазонской рѣкѣ не могли считать дальше трехъ, потому что простѣйшій способъ выраженія понятія объ этомъ числѣ на ихъ языкѣ состоитъ изъ слѣдующаго сочетанія звуковъ: Поэттаррарорринкоароакъ [2]).

Что касается ариѳметическихъ дѣйствій, то интересно замѣтить, что въ Европу былъ введенъ индусскій обычай начинать сложеніе или вычитаніе иногда справа, по большей

---

[1]) Dictionnaire de la Langue Française par *E. Littré.* Интересно замѣтить, что епископъ Беркли, будучи юношей двадцати трехъ лѣтъ, издалъ на латинскомъ языкѣ ариѳметику (1707), въ которой слова *билліонъ, трилліонъ* и т. д. имѣютъ это новое значеніе.

[2]) *Peacock,* p. 390.

же части слѣва. Несмотря на неудобство этого послѣдняго способа, онъ встрѣчается въ Европѣ еще въ концѣ шестнадцатаго столѣтія [1]).

Подобно индусамъ, итальянцы пользовались различными методами умноженія чиселъ. Повидимому, итальянскіе вычислители-практики съ необыкновенной страстью предавались изобрѣтенію новыхъ формъ. Пачіоли и Тарталья говорятъ объ этомъ пристрастіи съ пренебреженіемъ [2]). Самъ Пачіоли даетъ восемь методовъ и иллюстрируетъ первый изъ нихъ, называемый *bericuocoli* или *schacherii*, первымъ изъ приведенныхъ здѣсь примѣровъ [3]):

```
       9876             9876
       6789             6789
     |8|8|8|8|4|        61101000
   |7|9|0|0|8|           5431200
  |6|9|1|3|2|             475230
|5|9|2|5|6|                40734
67048164                67048164
```

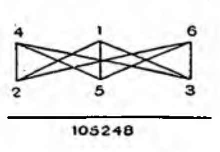
Второй методъ, называвшійся неизвѣстно почему *castellucio*, т. е. „маленькимъ замкомъ“, показанъ здѣсь на второмъ примѣрѣ. Третій методъ (не показанный здѣсь) требуетъ употребленія вспомогательныхъ таблицъ; четвертый *crocetta sine casella*, т. е. „посредствомъ умноженія накрестъ“, хотя и труднѣе другихъ, былъ въ употребленіи у индусовъ (которые называли его способомъ „молніи“); имъ особенно восхищается Пачіоли. Смотри нашъ третій примѣръ, въ которомъ произведеніе образуется слѣдующимъ образомъ:

$$3.6 + 10(3.1 + 5.6) + 100(3.4 + 5.1 + 2.6)$$
$$+ 1000(5.4 + 2.1) + 10\,000(2.4).$$

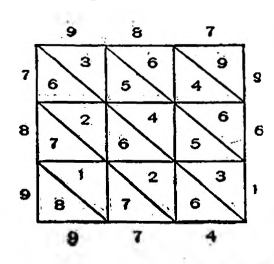
Въ пятомъ методѣ Пачіоли, называемомъ *quadrilatero*, или „умноженіемъ посредствомъ квадрата“, цифры пишутся на квадратѣ, раздѣленномъ, какъ шахматная доска, на индусскій манеръ, и складываются по діагоналямъ. Шестой способъ

1) *Peacock*, p. 427.
2) *Peacock*, p. 431.
3) *Peacock*, p. 429; *Cantor*, II, 285.

его называется *gelosia*, или *graticola*, т. е. „рѣшетчатымъ умноженіемъ“ (смотри четвертый примѣръ, 987 × 987). Онъ называется такъ потому, что соотвѣтствующая фигура похожа на рѣшетчатыя ставни-жалузи, подобныя тѣмъ, которыя вѣшались тогда на венеціанскія окна, и мѣшали проходящимъ по улицѣ видѣть сидящихъ у оконъ дамъ и монахинь [1]). Слово *gelosia* обозначаетъ первоначально ревность. Послѣдніе два метода Пачіоли иллюстрируются соотвѣтственно примѣрами: 234 × 48 = 234 × 6 × 8 и 163 × 17 = 163 × 10 + 163 × 7.



Нѣкоторыя книги излагаютъ также способъ умноженія, придуманный арабами въ раннія времена въ подражаніе одному изъ индусскихъ методовъ. Мы иллюстрируемъ его на примѣрѣ [2]) 359 × 857 = 300483. Было бы ошибочно заключать изъ существованія этихъ или другихъ методовъ, что всѣми ими дѣйствительно пользовались. Въ сущности первый способъ Пачіоли (вошедшій теперь во всеобщее употребленіе) примѣнялся въ то время на практикѣ почти исключительно. Слѣдовало бы предпочесть, какъ мы покажемъ дальше, второй способъ Пачіоли, иллюстрированный на нашемъ второмъ примѣрѣ.



Достойно замѣчанія то обстоятельство, что у индусовъ и арабовъ не было, повидимому, *таблицы* умноженія, подобной той, напримѣръ, которая дана у Боэтія [3]) и расположена въ видѣ квадрата. Мы приводимъ ее здѣсь только въ предѣлахъ умноженія 4 × 4. Итальянцы давали эту таблицу въ своихъ ариѳметикахъ. Другая форма таблицы,

---

[1]) *Peacock*, p. 431 *).

*) „Gelosia intendiamo quelle graticelle che si costumono mettere ale finestre de le case dove habitano donne acio non si possino facilmente vedere o altri religiosi. Diche molto abonda la excelsa cita de vinegia“. *Pacioli*. Summa de Arithmetica etc. Venet., 1494, f. 28 r. *Прим. ред.*

[2]) *Unger*, p. 77.

[3]) *Boethius* (изданіе *Фридлейна*), p. 53.

треугольная, приведенная здѣсь до 4×4, также встрѣчается иногда въ руководствахъ по ариѳметикѣ. Нѣкоторые писатели (какъ, напримѣръ, Finaeus во Франціи и Recorde въ Англіи) излагаютъ также родъ дополнительнаго умноженія, напоминающаго процессъ, встрѣчающійся впервые у римлянъ. Его называютъ часто „правиломъ лѣнивца“; цѣль этого способа освободить вычислителя отъ необходимости помнить наизусть произведенія однозначныхъ чиселъ, превышающихъ 5. Онъ аналогиченъ по ходу вычисленія Гербертову дополнительному дѣленію: „вычти каждую цифру изъ 10, запиши рядомъ всѣ разности и прибавь столько десятковъ къ ихъ произведенію, на сколько единицъ $\left\{\begin{matrix}\text{первая}\\ \text{вторая}\end{matrix}\right\}$ цифра превосходитъ $\left\{\begin{matrix}\text{вторую}\\ \text{первую}\end{matrix}\right\}$ разность“ [1]). Если a и b означаютъ цифры, то описанное правило основывается на тожествѣ $(10-a)(10-b) + 10(a+b-10) = ab$.

4
0 0
0 7 9 8
9 6 7 2.
3 8 7 2 7 3
2 4 0 8 3 7
3 5 9 9 9
3 5 5
3

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

1
2 4
3 6 9
4 8 12 16

Дѣленіе всегда разсматривалось, какъ дѣйствіе, представляющее значительныя трудности. Пачіоли даетъ четыре метода дѣленія. Первый, „дѣленіе въ умѣ“ *), употребляется тогда, когда дѣлитель число однозначное или двузначное (такое, какъ 12, 13), содержащееся въ итальянскихъ таблицахъ умноженія [2]). Второй способъ состоитъ въ послѣдовательномъ дѣленіи на простые множители дѣлителя. Третій способъ, „посредствомъ придачи“, называется такъ потому, что послѣ каждаго вычитанія мы *придаемъ* или *сносимъ* еще одну цифру справа. Это способъ „долгаго дѣленія“, которымъ пользуются преимущественно въ наше время. Пачіоли говоритъ, однако, съ особеннымъ энтузіазмомъ о четвертомъ методѣ, получившемъ у итальян-

[1]) *Peacock,* p. 432.

*) Partire a regolo over a tavoletta. *Pacioli,* Summa f., 32 r.
Прим. ред.

[2]) *Peacock,* p. 432.

цевъ названіе „галера“ *), потому что по окончаніи вычисленія цифры располагаются въ формѣ этого судна. Пачіоли считалъ этотъ способъ вычисленія самымъ быстрымъ, подобно тому, какъ галера быстрѣйшее изъ судовъ. Англичане называютъ его методомъ *помарокъ* (*scratch* method). Полное дѣленіе 59078 на 74 показано на фиг. 1 [1]).

```
 62                                                       6
 795                                         7           79
 10216                          10          102         1021
59078(798 26/74   59078(     59078(7     59078(7     59078(79
 7444              74          74          744         744
 77                                        7           7
  Фиг. 1.          Фиг. 2.     Фиг. 3.     Фиг. 4.     Фиг. 5.
```

Другія четыре фигуры показываютъ различныя стадіи дѣленія [2]).

Въ теченіе долгаго времени способъ *галеры* или *помарокъ* предпочитался другимъ методамъ и употреблялся почти

---

*) „Galea vel batello“, *Pacioli.* Summa f., 34 r. *Прим. ред.*

[1]) Этотъ примѣръ заимствованъ у стараго нѣмецкаго математика Пурбаха и приведенъ въ книгѣ *Arno Sadowski,* Die Österreichische Rechenmethode, Königsberg, 1892, p. 14. Примѣръ, данный Пачіоли на дѣленіе по способу *галеры* приведенъ у *Пикока,* p. 433, и у *Унгера,* p. 79.

[2]) Работа вычисленія производится слѣдующимъ образомъ: фигура 2-ая показываетъ дѣлимое и дѣлителя, написанныхъ въ надлежащемъ положеніи, а также кривую скобку, указывающую мѣсто для записыванія частнаго. Запишемъ 7 въ частномъ; тогда $7 \times 7 = 49$, $59 - 49 = 10$; запишемъ 10 сверху, зачеркнемъ 59, а также 7 въ дѣлителѣ. $7 \times 4 = 28$; такъ какъ 4 находится подъ 0 въ дѣлимомъ, то 28 нужно вычесть изъ 100; въ остаткѣ получаемъ 72; зачеркнемъ 10, 0 въ дѣлимомъ и 4 въ дѣлителѣ (фиг. 3); сверху напишемъ 7 и 2 Запишемъ дѣлитель, сдвинувъ его на одно мѣсто вправо, какъ показано на фиг. 4. Замѣчаемъ теперь, что 7 въ 72 содержится 9 разъ; $9 \times 7 = 63$; $72 - 63 = 9$; зачеркнемъ 72 и 7 внизу, напишемъ 9 вверху; $9 \times 4 = 36$; $97 - 36 = 61$; зачеркнемъ 9 вверху, напишемъ надъ нимъ 6; зачеркнемъ 7 въ дѣлимомъ и напишемъ надъ нимъ 1; зачеркнемъ 7 и 4 внизу (фиг. 5). Снова передвинемъ дѣлителя на одно мѣсто вправо. Онъ содержится въ остаткѣ 8 разъ; $7 \times 8 = 56$; $61 - 56 = 5$; зачеркнемъ 6 и 1 вверху и напишемъ 5 надъ 1; $8 \times 4 = 32$; $58 - 32 = 26$; зачеркнемъ 5 вверху и напишемъ 2; надъ зачеркнутой цифрой 8 въ дѣлимомъ напишемъ 6 (фиг. 1). Въ остаткѣ 26.

исключительно. Еще въ семнадцатомъ столѣтіи его предпочитали тому способу дѣленія, который въ ходу въ настоящее время. Онъ былъ принятъ въ Испаніи, Германіи и Англіи. Мы находимъ его въ сочиненіяхъ такихъ математиковъ, какъ Tonstall, Recorde, Stifel, Stevin, Wallis, Napier и Oughtred. Только въ началѣ восемнадцатаго столѣтія онъ былъ оставленъ въ Англіи [1]). Слѣдуетъ помнить, что способъ *помарокъ* появился первоначально не въ той формѣ, въ какой мы встрѣчаемъ его у писателей шестнадцатаго вѣка. Напротивъ, онъ представляетъ собою просто графическое изображеніе метода, которымъ пользовались индусы, производившіе вычисленія съ помощью грубаго карандаша на небольшой дощечкѣ, покрытой пылью. Сглаживаніе цифръ у индусовъ превращается здѣсь въ вычеркиваніе цифръ. На индусской дощечкѣ нашъ примѣръ, заимствованный у Пурбаха, имѣлъ бы по окончаніи вычисленія слѣдующій видъ:

26	
59078	798
74	

Повѣрка дѣйствій посредствомъ „выбрасыванія 9-къ", которымъ стали пользоваться европейскіе вычислители, была также методомъ полезнымъ для индусовъ, но плохо приспособленнымъ для вычисленія на бумагѣ или на грифельной доскѣ: въ этихъ случаяхъ по окончаніи вычисленія весь ходъ его остается записаннымъ, и можно легко провѣрить всѣ его шаги.

Какъ для дѣленія употреблялось два метода, соперничавшіе между собой (методъ „придачи" и „галера"), такъ и для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней пользовались двумя способами [2]). Въ случаѣ ирраціональности этихъ корней математики съ особеннымъ интересомъ занимались разысканіемъ правилъ приближеннаго ихъ вычисленія. Леонардъ изъ Пизы, Тарталья и другіе приводятъ

---

[1]) *Peacock*, p. 434.

[2]) Примѣръ извлеченія квадратнаго корня по способу *помарокъ* смотри у *Пикока*, p. 436.

арабское правило (которое мы находимъ, напримѣръ, въ сочиненіяхъ арабскихъ математиковъ Ибнъ Альбанна̂ и Алькалса̂ди); правило это можетъ быть выражено съ помощью нашихъ алгебраическихъ символовъ слѣдующимъ образомъ [1]):

$$\sqrt{a^2 - x} = a + \frac{x}{2a}.$$

Эта формула даетъ избыточное значеніе квадратнаго корня; значеніе съ недостаткомъ доставляется другимъ арабскимъ правиломъ:

$$\sqrt{a^2 - x} = a + \frac{x}{2a + 1}.$$

Подобныя же формулы были придуманы для извлеченія кубическаго корня.

Въ другихъ методахъ приближеннаго вычисленія ирраціональныхъ корней появляется впервые идея десятичныхъ дробей; истинная природа и значеніе этихъ дробей не были, однако, еще замѣчены. Около средины двѣнадцатаго столѣтія Іоаннъ Севильскій, вѣроятно въ подражаніе индусскимъ методамъ, приписываетъ къ числу $2n$ нулей, находитъ затѣмъ квадратный корень и принимаетъ его за числителя дроби, знаменателемъ которой служитъ 1 съ n нулями. Тѣмъ же методомъ пользовался и Карданъ, но онъ не получилъ всеобщаго признанія среди математиковъ того времени даже въ Италіи; въ противномъ случаѣ о немъ упомянулъ бы, по крайней мѣрѣ, Cataldi (ум. въ 1626 г.) въ сочиненіи, посвященномъ исключительно извлеченію корней. Катальди находитъ квадратные корни съ помощью непрерывныхъ дробей — методъ остроумный и новый, но въ практическомъ отношеніи стоящій ниже Карданова метода. Orontius Finæus во Франціи и William Buckley (ум. около 1550 г.) въ Англіи извлекали квадратные корни такъ же, какъ и Карданъ. При нахожденіи квадратнаго корня изъ десяти Finaeus приписываетъ къ этому числу шесть

---

[1]) Ср. *Cantor*, I, 765; *Peacock*, p. 436.

нулей и производитъ вычисленіе такъ, какъ здѣсь показано. 3|162 выражаетъ квадратный корень въ десятичныхъ доляхъ. Онъ встрѣтился, такимъ образомъ, подобно многимъ своимъ современникамъ, лицомъ къ лицу съ новымъ отдѣломъ ариѳметики — десятичными дробями! Однако, онъ этого не видитъ; онъ думаетъ о шестидесятичныхъ дробяхъ и спѣшитъ привести дробную часть найденнаго корня къ шестидесятичнымъ дѣленіямъ единицы[1]), выражая его такъ: 3 . 9′. 43″. 12‴. Что было нужно для открытія десятичныхъ дробей въ подобномъ случаѣ? *Наблюденіе, внимательное наблюденіе.* И, однако, нѣкоторые философы хотятъ увѣрить насъ въ томъ, что наблюденіе въ математикѣ не нужно, что при занятіяхъ этой наукой способность наблюденія не развивается!

1000000(	3	162
		60
	9	720
		60
	43	200
		60
	12	000

Къ открытію десятичныхъ дробей математики приближались и другими путями. Нѣмецъ Кристофъ Рудольфъ производилъ дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д., отдѣляя запятой („mit einer virgel") [2]) столько цифръ, сколько нулей въ дѣлителѣ.

Честь изобрѣтенія десятичныхъ дробей принадлежитъ бельгійскому ученому изъ города Брюгге, *Симону Стевину* (Simon Stevin, 1548—1620), человѣку замѣчательному разнообразіемъ своихъ научныхъ открытій, независимостью мыслей и въ то же время чрезвычайнымъ уваженіемъ къ авторитетамъ *). Было бы интересно знать, какъ именно онъ пришелъ къ своему великому открытію. Въ 1584 г. онъ опубликовалъ на фламандскомъ языкѣ (позднѣе на французскомъ) таблицу процентовъ. „Я теперь увѣренъ въ томъ" говоритъ де Морганъ[3]), „что тѣ же самыя соображенія удобства, которыя

[1]) *Peacock,* p. 437.

[2]) *Cantor,* II, 366.

*) Въ подлинникѣ „extreme lack of respect for authority". Ср. *Ad. Quetelet.* Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles, 1871, p. 144—145, гдѣ утверждается противное.

Прим. ред.

[3]) *Arithmetical Books,* p. 27.

всегда заставляли придавать десятичную форму таблицамъ сложныхъ процентовъ, привели и къ открытію самыхъ десятичныхъ дробей“. Въ 1585 г. Стевинъ издалъ свою книгу *La Disme* (четвертую часть математическаго сочиненія на французскомъ языкѣ), содержащую только семь страницъ, въ которой и были объяснены десятичныя дроби. Онъ вполнѣ признавалъ важность десятичныхъ дробей и прилагалъ къ нимъ всѣ дѣйствія обыкновенной ариѳметики. Никакое изобрѣтеніе не родится совершеннымъ; Стевиновымъ десятичнымъ дробямъ не хватало подходящаго обозначенія. Вмѣсто нашей десятичной точки *) онъ употреблялъ нуль; каждый десятичный знакъ дроби былъ снабженъ соотвѣтствующимъ указателемъ. Такъ, въ его системѣ обозначенія число 5.912 изображалось бы слѣдующимъ образомъ: $\overset{0\,1\,2\,3}{5912}$, или 5⓪9①1②2③ . Эта система указателей, хотя и громоздкая, интересна потому, что въ ней мы находимъ принципъ другого важнаго нововведенія, сдѣланнаго Стевиномъ — обозначенія показателей. Для иллюстраціи Стевинова обозначенія мы приведемъ слѣдующее дѣленіе [1]).

```
(0) (1) (2) (3) (4) (5)      (1) (2)
 3   4   4   3   5   2   на   9   6

         1
     1   8 . 6
     3   1   1   4
     7   6   3   7         (0) (1) (2) (3)
 3   4   4   3   5   2  (   3   5   8   7
     9   6   6   6
         9   9   9
```

Онъ говорилъ восторженно не только о десятичныхъ дробяхъ, но также о десятичномъ дѣленіи мѣръ и вѣсовъ. Онъ полагалъ, что государства обязаны были бы установить такую систему мѣръ. Что же касается десятичныхъ дробей, то онъ говоритъ, что, хотя введеніе ихъ и можетъ быть отложено на нѣкоторое время, однако, „можно быть увѣреннымъ въ томъ, что, если и въ будущемъ природа человѣка останется такой же, какъ и теперь, то онъ не всегда будетъ пренебрегать ихъ великими преимуществами“. Его десятичныя дроби встрѣтили охотное, хотя и не немедленное признаніе. Его сочиненіе *La Disme* было переведено на англійскій языкъ Ричардомъ Нортономъ

---

*) Замѣняющей у англичанъ и американцевъ нашу запятую. *Прим. ред.*

[1]) *Peacock,* p. 440.

въ 1608 году. Сочиненіе по десятичной ариѳметикѣ было опубликовано въ Лондонѣ въ 1619 г.; авторъ его Henry Lyte[1]). Что же касается мѣръ и вѣсовъ, то подозрѣвалъ ли Стевинъ, что пройдетъ цѣлыхъ двѣсти лѣтъ до изобрѣтенія метрической системы, и что въ концѣ девятнадцатаго столѣтія Англія и Новый Свѣтъ будутъ безнадежно прикованы цѣпями обычая къ употребленію ярдовъ, родовъ и старыхъ вѣсовыхъ единицъ*). Но мы все еще надѣемся, что слова Джона Керси не окажутся пророческими: „такъ какъ невѣроятно, что когда-нибудь произойдетъ такая реформа, я приступлю къ изложенію указаній, которыя помогутъ прилежному читателю пользоваться умѣренно тѣми десятичными дробями, которыя находятся въ его распоряженіи“ [2]).

Послѣ Стевина десятичныя дроби употребляли на континентѣ *Joost Bürgi,* швейцарецъ по рожденію, оставившій рукописное сочиненіе по ариѳметикѣ, написанное скоро послѣ 1592 г., и *Johann Hartmann Beyer,* который считалъ эти дроби своимъ собственнымъ изобрѣтеніемъ. Въ 1603 г. во Франкфуртѣ-на-Майнѣ вышло въ свѣтъ его сочиненіе *Logistica Decimalis.* У Бюрги знакомъ раздѣленія служилъ нуль, поставленный подъ цифрой единицъ. Беерово обозначеніе напоминаетъ систему Стевина; на мысль объ этомъ могло, однако, навести господствовавшее тогда шестидесятичное обозначеніе. Онъ пишетъ дробь 123.459872 слѣдующимъ образомъ:

$$\overset{0}{123}.\overset{\mathrm{I}}{4}.\overset{\mathrm{II}}{5}.\overset{\mathrm{III}}{9}.\overset{\mathrm{IV}}{8}.\overset{\mathrm{V}}{7}.\overset{\mathrm{VI}}{2}.$$

Онъ пишетъ также $\overset{\mathrm{VI}}{54}$ вмѣсто .000054***) и замѣчаетъ, что такія дроби отличаются отъ другихъ тѣмъ, что знаменатель

[1]) *Peacock,* p. 440.

*) *Rod* — мѣра длины въ 16½ футовъ, содержитъ 5½ ярдовъ, *avoirdupois weights* (авёрдьюпойзъ),— вѣсъ, фунтъ котораго заключаетъ 16 унцій. *Прим. ред.*

[2]) *Kersey's Wingate,* 16 th Ed., London, 1735, p. 119. *Wildermuth* приводитъ то же мѣсто по второму изданію 1668 г.**).

**) Въ подлинникѣ написано слѣдующее: „It being improbable that such a Reformation will ever be brought to pass, I shall proceed in directing a Course to the Studious for obtaining the frugal Use of such decimal fractions as are in his Powers“.

***) т. е. 0.000054. *Прим. ред.*

ихъ надписанъ надъ числителемъ. Десятичная точка, по словамъ Пикока, принадлежитъ Неперу, который въ 1617 г. опубликовалъ сочиненіе *Rabdologia*, содержащее трактатъ о десятичныхъ дробяхъ, гдѣ онъ пользуется десятичной точкой въ одномъ или двухъ случаяхъ. Въ англійскомъ переводѣ Неперова *Descriptio* *), сдѣланномъ Эдуардомъ Райтомъ въ 1616 году и исправленномъ авторомъ, десятичная точка встрѣчается на первой страницѣ логариѳмическихъ таблицъ. Англійскія ариѳметики, вышедшія въ свѣтъ между 1619 и 1631 годами, совсѣмъ не упоминаютъ о десятичныхъ дробяхъ. Oughtred въ 1631 году обозначаетъ .56 слѣдующимъ образомъ: 0|56. Альбертъ Жираръ, ученикъ Стевина, въ 1629 году употребляетъ точку въ одномъ случаѣ. Джонъ Валлисъ въ 1657 году пишетъ 12|345, но позднѣе въ своей алгебрѣ пользуется обычнымъ обозначеніемъ съ помощью точки. Georg Andreas Böckler въ своей книгѣ *Arithmetica nova*, вышедшей въ Нюрнбергѣ въ 1661 году, пользуется запятой вмѣсто точки (какъ поступаютъ нѣмцы въ настоящее время), но прилагаетъ десятичныя дроби только къ измѣренію длинъ, поверхностей и объемовъ [1]. Де Морганъ [2] говоритъ, что „прошло много времени, пока были признаны всѣ преимущества употребленія простой десятичной точки; такъ было въ Англіи, а континентальные писатели еще отстали отъ насъ въ этомъ отношеніи. Пока Oughtred былъ широко распространенъ, т. е. до конца семнадцатаго столѣтія, была, вѣроятно, обширная школа людей, привыкшихъ пользоваться обозначеніемъ 123|456. Мы должны поэтому отнести къ первой четверти восемнадцатаго вѣка не только полную и окончательную побѣду десятичной точки, но также и побѣду общеупотребительныхъ теперь способовъ производства дѣйствій дѣленія и извлеченія квадратнаго корня“. Прогрессъ

---

*) т. е. Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, напеч. въ Единбургѣ въ 1614 г. Англійскій переводъ, напечатанный въ Лондонѣ въ 1616 году, носитъ заглавіе A Description of the admirable Table of logarithmes etc. Invented and published in latin .... and translated into english by the late learned and famous mathematician Edward Wright, etc.

Прим. ред.

[1] *Wildermuth.*

[2] *Arithmetical Books*, p. 26.

десятичнаго обозначенія, какъ и всякаго другого, весьма интересенъ и поучителенъ. „Исторія языка... въ высшей степени интересна и полезна; умъ, способный къ размышленію, заимствуетъ отъ нея лучшіе уроки для будущаго". (Де Морганъ).

Многимъ читателямъ, безъ сомнѣнія, покажется страннымъ, что идея десятичныхъ дробей не появилась сразу въ умахъ математиковъ, какъ естественное распространеніе индусской системы нумераціи, достигшей совершенства еще въ пятомъ или шестомъ столѣтіи. „Удивительно, какъ далеко должна была пойти наука въ изслѣдованіи явленій физической природы, и какъ глубоко должны были ученые проникнуть въ природу чиселъ, прежде чѣмъ замѣтили, что всемогущая простота арабскаго обозначенія одинаково цѣнна и удобна какъ для безконечно возрастающей, такъ и для безконечно убывающей прогрессіи"[1]).

Опытному преподавателю много разъ приходится дѣлать подобныя наблюденія надъ развитіемъ мыслей, слѣдя за успѣхами своихъ учениковъ. Умъ ученика, какъ и умъ изслѣдователя, направленъ на достиженіе какой-нибудь опредѣленной цѣли (рѣшеніе задачи), и всякія соображенія, не связанныя непосредственно съ этой цѣлью, часто ускользаютъ отъ его вниманія. Люди, разыскивающіе какой-нибудь опредѣленный цвѣтокъ, часто не замѣчаютъ другихъ цвѣтовъ, какъ бы ни были они прекрасны. Учитель математики, какъ и учитель естественной исторіи, если только они желаютъ, чтобы преподаваніе шло успѣшно, должны стараться пріучать учениковъ постоянно слѣдить за другими вещами, кромѣ тѣхъ, которыя составляютъ главный предметъ изысканія, и также размышлять и о нихъ. Такая метода воспитываетъ изслѣдователей, самостоятельныхъ работниковъ.

Современное вычисленіе обязано своимъ удивительнымъ могуществомъ тремъ изобрѣтеніямъ: индусскому обозначенію, десятичнымъ дробямъ и логариѳмамъ. Изобрѣтеніе

---

[1]) *Napier Mark.* Memoirs of John Napier of Merchiston, Edinburgh. 1834, Chap. II.

логариѳмовъ въ первой четверти семнадцатаго столѣтія было удивительно кстати, такъ какъ Кеплеръ изслѣдовалъ въ это время планетныя орбиты, а Галилей только-что направилъ на звѣзды свой телескопъ. Въ теченіе второй половины пятнадцатаго вѣка и въ теченіе шестнадцатаго вѣка нѣмецкіе математики построили очень точныя тригонометрическія таблицы, но увеличеніе точности увеличивало въ громадной мѣрѣ и работу вычислителя. Можно безъ преувеличенія сказать вмѣстѣ съ Лапласомъ, что изобрѣтеніе логариѳмовъ, „сокративъ труды астронома, удвоило его жизнь". Логариѳмы были изобрѣтены *Джономъ Неперомъ*, барономъ Мерчистонскимъ (*Jonh Napier*, Baron of Merchiston), въ Шотландіи (1550—1617). Тринадцати лѣтъ отъ роду, Неперъ поступилъ въ St. Salvator College, St. Andrews. Одинъ изъ дядей Непера написалъ однажды къ его отцу: „я прошу Васъ, сэръ, послать Джона въ школу во Францію или во Фландрію, потому что дома онъ ничему доброму научиться не можетъ". Его и послали за-границу. Въ 1574 г. для него былъ построенъ великолѣпный замокъ на берегахъ Эндрика. На противоположной сторонѣ рѣки была льняная мельница, стукъ которой сильно мѣшалъ Неперу. Чтобы ходъ его мыслей не прерывался, онъ иногда просилъ мельника остановить мельницу [1]). Въ 1608 году по смерти своего отца онъ вступилъ во владѣнія Мерчистонскимъ замкомъ.

Неперъ прилежно изучалъ богословіе и астрологію [2]) и находилъ особое удовольствіе въ доказательствѣ того, что

---

[1]) Dict. Nat. Biog.

[2]) Въ связи съ этими занятіями находится, между прочимъ, книга, носящая слѣдующее интересное заглавіе: „A Bloody Almanack Foretelling many certaine predictions which shall come to passe this present yeare 1647. With a calculation concerning the time of the day of Judgment, drawne out and published by that famous astrologer, the Lord Napier of Marcheston", т. е. „Кровавый альманахъ, предрекающій много вѣрныхъ предсказаній того, что произойдетъ въ этомъ текущемъ году 1647. Вмѣстѣ съ вычисленіемъ, относящимся ко времени наступленія дня Страшнаго Суда; составлено и опубликовано знаменитымъ астрологомъ лордомъ Неперомъ Марчестонскимъ". Объ этомъ сочиненіи см. *Макдональдово* изданіе *Неперова* Constructio: Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, 1889, гдѣ есть также каталогъ Неперовыхъ сочиненій.

папа — антихристъ. Болѣе достойнымъ его генія были его математическія работы, которыми онъ занимался для времяпрепровожденія болѣе сорока лѣтъ. Нѣкоторые изъ его математическихъ отрывковъ были напечатаны въ 1839 году. Главнымъ предметомъ его математическихъ работъ было упрощеніе и приведеніе въ систему ариѳметики, алгебры и тригонометріи. Изучавшіе тригонометрію помнятъ „Неперовы аналогіи" и „Неперово правило круговыхъ частей" для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ. Это, вѣроятно, „наиболѣе удачный образецъ искусственныхъ пріемовъ для облегченія памяти". Въ 1617 году онъ опубликовалъ свое сочиненіе *Рабдологія,* содержащее „Неперовы палочки", или „кости" [1]), и другія средства для облегченія умноженія и дѣленія. Это сочиненіе было хорошо извѣстно на континентѣ и въ теченіе нѣкотораго времени привлекало даже больше вниманія, чѣмъ логариѳмы. Еще въ 1721 году E. Hatton считаетъ нужнымъ объяснить въ своей ариѳметикѣ умноженіе, дѣленіе и извлеченіе квадратнаго корня съ помощью Неперовыхъ костей, или палочекъ.

Неперъ пришелъ къ открытію своихъ логариѳмовъ безъ всякой посторонней помощи путемъ продолжительнаго одинокаго размышленія. Теперь мы обыкновенно говоримъ, что въ формулѣ $n = b^x$ показатель x есть логариѳмъ n по основанію b, но во времена Непера наше обозначеніе показателей не было еще въ ходу. Попытки ввести показатели, сдѣланныя Стифелемъ и Стевиномъ, не имѣли успѣха, и Гарріотъ, алгебра котораго появилась долгое время спустя послѣ Неперовой смерти, ничего объ нихъ не знаетъ. Однимъ изъ любопытнѣйшихъ фактовъ въ исторіи науки является именно то, что Неперъ построилъ логариѳмы раньше, чѣмъ вошли въ употребленіе показатели. Что логариѳмы выте-

[1]) Описаніе Неперовыхъ костей см. въ статьѣ „Napier, John" въ Encyclopaedia Britannica, 9th Ed. Въ посвященіи своего сочиненія Неперъ говоритъ: „я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отдѣлаться отъ трудности и скуки вычисленій, докучность которыхъ обыкновенно отпугиваетъ очень многихъ отъ изученія математики". См. Макдональдово изданіе Неперовой книги Construction, p. 88.

каютъ изъ разсмотрѣнія знака показателя, было замѣчено впервые значительно позже Эйлеромъ [1])*). Каковъ же былъ ходъ мыслей у Непера?

Пусть AE — прямая опредѣленной длины, $A'D'$ — безконечная прямая, выходящая изъ A'. Вообразимъ себѣ двѣ точки, начинающія двигаться одновременно; одна изъ нихъ движется отъ A къ E, а другая исходитъ изъ A' и движется вдоль $A'D'$. Допустимъ, что скорость ихъ движенія въ первый моментъ одна и та же. Пусть движеніе точки по линіи $A'D'$ равномѣрно, скорость же точки, движущейся по AE, убываетъ такимъ образомъ, что, когда точка эта приходитъ въ положеніе C, скорость ея пропорціональна непройденному еще разстоянію CE. Если первая точка проходитъ разстояніе AC въ то время, какъ вторая проходитъ разстояніе $A'C'$, то Неперъ называетъ $A'C'$ логариѳмомъ CE.

A B C D E

A' B' C' D'

Такое происхожденіе логариѳмовъ кажется страннымъ человѣку, изучающему математику въ наше время. Разовьемъ эту теорію полнѣе. Предположимъ, что начальная скорость v, равная AE, очень велика; тогда въ теченіе каждаго послѣдовательнаго короткаго промежутка или момента времени измѣряемаго дробью $\frac{1}{v}$, нижняя точка будетъ проходить единицу разстоянія, равную произведенію постоянной скорости v на время $\frac{1}{v}$.

Верхняя точка, начинающая двигаться съ тою же скоростью $v = AE$, пройдетъ въ теченіе перваго момента разстояніе AB, весьма близкое къ единицѣ, и придетъ въ положеніе B со скоростью $= BE = v - 1 = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)$. Въ теченіе второго момента времени скорость верхней точки

[1]) *J. J. Walker,* Influence of Applied on the Progress of Pure Mathematics; Proceedings Lond. Math. Soc., XXII, 1890.

*) См. прибавленіе въ концѣ книги. *Прим. ред.*

очень мало отличается отъ $v-1$; слѣдовательно, пройденное разстояніе BC равно $\frac{v-1}{v}$, а разстояніе $CE = BE - BC = v - 1 - \frac{v-1}{v} = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2$. Подобнымъ образомъ мы найдемъ, что разстояніе точки отъ E въ концѣ третьяго момента равно $v\left(1-\frac{1}{v}\right)^3$, а въ концѣ v'таго момента, $v\left(1-\frac{1}{v}\right)^v$. Поэтому разстоянія верхней точки отъ E въ концѣ послѣдовательныхъ моментовъ суть члены перваго изъ написанныхъ ниже рядовъ:

$$\begin{array}{cccccc} v, & v\left(1-\frac{1}{v}\right), & v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2, & v\left(1-\frac{1}{v}\right)^3, & \ldots, & v\left(1-\frac{1}{v}\right)^v, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, & v. \end{array}$$

Второй рядъ представляетъ разстоянія нижней точки отъ A' въ концѣ соотвѣтствующихъ промежутковъ времени. Согласно Неперову опредѣленію, числа нижняго ряда суть логариѳмы соотвѣтствующихъ чиселъ верхняго. Мы видимъ еще, что нижній рядъ представляетъ собой ариѳметическую прогрессію, а верхній — геометрическую. Здѣсь Неперово открытіе соприкасается съ трудами предшествовавшихъ ему изслѣдователей, съ работами Архимеда и Стифеля; въ этомъ мѣстѣ существуетъ непрерывный переходъ отъ стараго къ новому.

Соотношеніе между числами и ихъ логариѳмами, устанавливаемое разсмотрѣнными нами рядами, вѣрно, конечно, и для тѣхъ логариѳмовъ, которые вошли теперь во всеобщее употребленіе. Для чиселъ геометрическаго ряда 1, 10, 100, 1000 служатъ обыкновенными логариѳмами (при основаніи 10) числа ариѳметическаго ряда 0, 1, 2, 3. Слѣдуетъ замѣтить, однако, одну очень замѣчательную особенность Неперовыхъ логариѳмовъ: они возрастаютъ при *убываніи* чиселъ, и числа, превосходящія v, имѣютъ *отрицательные* логариѳмы. Кромѣ того, нуль есть логариѳмъ не единицы (какъ въ современныхъ логариѳмахъ), но числа v, которое Неперъ взялъ равнымъ 10^7. Неперъ вычислялъ не

логариѳмы послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ 1, но логариѳмы *синусовъ*. Его цѣлью было упрощеніе тригонометрическихъ вычисленій. Линія AE была синусомъ 90^0 (т. е. радіусомъ) и была принята равной 10^7 единицамъ. BE, CE, DE были синусами дугъ, а $A'B', A'C', A'D'$ ихъ логариѳмами. Изъ того, что было сказано, очевидно, что логариѳмы Непера отличаются отъ натуральныхъ логариѳмовъ по основанію $e = 2.718\cdots$. Это отличіе должно быть особенно подчеркнуто, потому что въ руководствахъ по алгебрѣ часто утверждается, что натуральные логариѳмы были изобрѣтены Неперомъ [1]). Соотношеніе между натуральными логариѳмами и логариѳмами Непера выражается слѣдующей формулой [2]):

$$\text{Неп. лог. } y = 10^7 \times \text{нат. лог. } \frac{10^7}{y}.$$

Слѣдуетъ упомянуть также о томъ, что Неперъ не опредѣлилъ основанія своей системы логариѳмовъ; ему даже не пришлось имѣть дѣла съ самымъ понятіемъ объ „основаніи". То основаніе, которое соотвѣтствуетъ его способу разсужденія, есть число, обратное основанію натуральной системы [3]).

---

[1]) Въ виду того, что нѣмецкіе писатели въ концѣ прошлаго столѣтія первые указали на это различіе, странно читать въ статьѣ „Logarithmus" Брокгаузова Konversations Lexikon (1894), что Неперъ изобрѣлъ натуральные логариѳмы. Ссылки на статьи старыхъ авторовъ, указавшихъ на эту ошибку, см. въ книгѣ *Dr. S. Günther,* Vermischte Untersuchungen, гл. V., или въ моей книгѣ Teaching and History of Mathematics in the United States, p. 390.

[2]) О происхожденіи этой формулы см. C. H. M., p. 163.

[3]) Для того, чтобы сдѣлалось приложимымъ понятіе объ „основаніи" необходимо, чтобы нуль былъ логариѳмомъ 1, а не 10^7. Опредѣляя основаніе Неперовой системы, мы должны раздѣлить каждый членъ геометрической и ариѳметической прогрессіи на 10^7, т. е. на значеніе v. Это даетъ намъ

$$1,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right),\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7},$$
$$0,\ \frac{1}{10^7},\ \frac{2}{10^7},\ \frac{3}{10^7},\ \ldots,\ 1.$$

Здѣсь 1 оказывается логариѳмомъ числа $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, которое почти равно e^{-1}, гдѣ e равно $2.718\cdots$. Отсюда слѣдуетъ, что основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ есть число, обратное основанію натуральной системы

Великое изобрѣтенiе Непера сдѣлалось извѣстнымъ свѣту въ 1614 году по сочиненiю, носящему названiе *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* [1]). Въ немъ онъ объяснилъ природу логариѳмовъ и далъ логариѳмическую таблицу натуральныхъ синусовъ перваго квадранта черезъ каждую минуту. Въ 1619 г. появилось посмертное сочиненiе Непера *Mirifici logarithmorum canonis constructio* [2]), въ которомъ объясненъ его методъ вычисленiя логариѳмовъ [3]). Мы приводимъ здѣсь извлеченiе изъ таблицы, напечатанной въ *Descriptio* въ 1614 г. (часть первой страницы):

Gr. 0   0   + | −

Min.	Sinus.	Logarithmi.	Differentiæ.	Logarithmi.	Sinus.	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55

Внизу первой страницы въ *Descriptio* направо поставлено „89", что означаетъ 89°. Въ столбцахъ, обозначенныхъ словомъ „sinus", находятся натуральные синусы 0° отъ 0 до 5 минутъ и 89° отъ 55 до 60 минутъ. Въ столбцахъ, надписанныхъ „logarithmi", находятся логариѳмы этихъ синусовъ, а

[1]) Изъ примѣчанiя въ концѣ таблицы логариѳмовъ: „Такъ какъ вычисленiя этой таблицы, которая должна была бы быть результатомъ сотрудничества многихъ вычислителей, были выполнены силами и старанiями одного, то и неудивительно, если въ него вкралось много ошибокъ". Таблица эта замѣчательно точна: въ ней найдено гораздо меньше ошибокъ, чѣмъ можно было бы ожидать. См. *Napier's* Construction (*Macdonald's* Ed.), pp. 87, 90—96.

[2]) Изданiе - факсимиле Лейденскаго изданiя этого сочиненiя (Lugduni 1620) вышло въ свѣтъ въ Парижѣ въ 1895 г. Англiйскiй переводъ Constructio, сдѣланный В. Р. Макдональдомъ, появился въ Эдинбургѣ, въ 1889 г.

[3]) *Краткое* изложенiе Неперова способа вычисленiя см. у *Кантора,* II, p. 669.

въ столбцѣ „differentiæ“— разности между соотвѣтствующими логариѳмами двухъ столбцовъ. Такъ какъ $\sin x = \cos (90 - x)$, то такое расположеніе таблицъ по полу-квадрантамъ въ дѣйствительности даетъ всѣ косинусы угловъ и ихъ логариѳмы. Такъ, $\log \cos 0^0 5' = 11$, a $\log \cos 89^0 55' = 65331315$. Сверхъ того, такъ какъ $\log \tan x = -\log \cot x = \log \sin x - \log \cos x$, то колонна, обозначенная „differentiæ“, даетъ логариѳмическіе тангенсы или логариѳмическіе котангенсы, смотря по тому будемъ ли мы брать разности со знакомъ + или —.

Неперовы логариѳмы тотчасъ послѣ ихъ появленія были оцѣнены по достоинству, какъ въ Англіи, такъ и на континентѣ. *Henry Briggs* (1556[1])—1630), который въ Неперово время былъ профессоромъ геометріи въ Грешамъ Колледжѣ въ Лондонѣ, а впослѣдствіи профессоромъ въ Оксфордѣ, пришелъ въ восхищеніе отъ книги Непера. „Своими новыми и удивительными логариѳмами Неперъ, лордъ Маркинстонскій, заставилъ меня усиленно работать и головой и руками. Я надѣюсь увидѣть его лѣтомъ, если Богу будетъ угодно, такъ какъ я никогда не видѣлъ книги, которая бы мнѣ больше нравилась и приводила въ большее изумленіе“. Бриггсъ былъ талантливый математикъ и одинъ изъ немногихъ людей того времени, не вѣрившихъ въ астрологію. Тогда какъ Неперъ былъ большимъ любителемъ этой лженауки, „невозможно было бы найти человѣка, который относился бы къ ней болѣе сатирически“, называя ее „системой безпочвенной фантазіи“. Бриггсъ бросилъ свои занятія въ Лондонѣ, чтобы отдать долгъ уваженія шотландскому философу. Интересна сцена ихъ свиданія. Вслѣдствіе задержки въ пути Бриггсъ не пріѣхалъ во время, и Неперъ сталъ жаловаться на это одному изъ ихъ общихъ друзей. „Увы, Джонъ“, сказалъ онъ, „мистеръ Бриггсъ не пріѣдетъ“. Въ тотъ же моментъ послышался стукъ въ дверь, и Бриггсъ вошелъ въ комнату лорда. Неперъ и Бриггсъ смотрѣли другъ на друга, не говоря ни слова; такъ прошло около четверти часа. Наконецъ, Бриггсъ началъ: „Милордъ, я

---

[1]) Dict. of National Biography указываетъ на 1561 годъ, какъ на годъ его рожденія.

предпринялъ это долгое путешествіе только для того, чтобы видѣть Вашу особу и узнать, съ помощью какого орудія остроумія и искусства Вы были приведены къ первой мысли объ этомъ превосходномъ пособіи для астрономіи, а именно о логариѳмахъ; но, милордъ, послѣ того, какъ Вы уже нашли ихъ, я удивляюсь, почему никто не нашелъ ихъ раньше,— настолько легкими кажутся они послѣ того, какъ о нихъ узнаешь" [1]). Бриггсъ указалъ Неперу, насколько было бы выгодно удержать нуль, какъ логариѳмъ полнаго синуса, но принять 10^7, какъ логариѳмъ десятой части того же синуса, т. е. $5^0 44' 22''$. Неперъ сказалъ, что онъ уже думалъ объ этой перемѣнѣ и указалъ вмѣстѣ съ тѣмъ на небольшое усовершенствованіе, которое можно было бы ввести въ идею Бриггса: нуль долженъ быть логариѳмомъ полнаго синуса; такимъ образомъ, характеристики чиселъ, бо̀льшихъ единицы, будутъ положительными, а не отрицательными, какъ вышло бы по предположенію Бриггса. Бриггсъ согласился съ тѣмъ, что это болѣе удобно. „Бригговы логариѳмы" были изобрѣтены поэтому Бриггсомъ и Неперомъ независимо другъ отъ друга. Большое практическое преимущество новой системы состояло въ томъ, что основная ея прогрессія была приспособлена къ основанію 10, числу служащему также основаніемъ нашей системы нумераціи. Бриггсъ посвятилъ всѣ свои силы построенію таблицы по новому плану. Неперъ умеръ въ 1617 году, удовлетворенный тѣмъ, что нашелъ въ Бриггсѣ друга, способнаго довести его дѣло до конца и выполнить его планы. Въ 1624 году Бриггсъ опубликовалъ свое сочиненіе *Arithmetica logarithmica*, содержащее 14-тизначные логариѳмы чиселъ отъ 1 до 20 000 и отъ 90 000 до 100 000. Пробѣлъ между 20 000 и 90 000 заполнилъ знаменитый преемникъ Непера и Бриггса— *Adrian Vlacq* изъ Гуды въ Голландіи. Онъ опубликовалъ въ 1628 году таблицу логариѳмовъ отъ 1 до 100 000, изъ которыхъ 70 000 вычислилъ самъ. Бригговы логариѳмы тригонометрическихъ функцій опубликовалъ впервые въ 1620 г. *Edmund Gunter*, коллега Бриггса, вычислившій семизначные

---

1) *Mark Napier's* Memoirs of John Napier, 1834, p. 409.

логариѳмы синусовъ и тангенсовъ черезъ каждую минуту. Гöнтеръ изобрѣлъ слова *косинусъ* и *котангенсъ*. Бриггсъ посвятилъ послѣдніе годы своей жизни вычисленію болѣе обширной таблицы Бригговыхъ логариѳмовъ тригонометрическихъ функцій; онъ умеръ въ 1630 году, оставивъ, однако, свою работу неоконченной. Ее продолжалъ англичанинъ *Henry Gellibrand;* Влаккъ издалъ ее затѣмъ на свой собственный счетъ. Бриггсъ раздѣлялъ градусъ на сто частей, но благодаря Влаккову изданію тригонометрическихъ таблицъ, основанному на старомъ шестидесятичномъ дѣленіи, нововведеніе Бриггса осталось непризнаннымъ. Бриггсъ и Влаккъ издали четыре фундаментальныя работы, результаты которыхъ „никогда не были превзойдены ни однимъ изъ позднѣйшихъ вычислителей“ [1]).

Мы указали на то, что логариѳмы, изданные Неперомъ, отличаются отъ нашихъ натуральныхъ логариѳмовъ. Первую таблицу логариѳмовъ послѣдняго образца опубликовалъ *John Speidell* [2]) подъ заглавіемъ *New Logarithmes* (Новые логариѳмы), London, 1619. Первый ученый, который ввелъ натуральные логариѳмы, конечно, заслуживаетъ того, чтобы имя его упоминалось въ общей исторіи математики; мы, однако, не нашли имени Джона Спейделя ни въ одной общей исторіи,—ни въ старой, ни въ новой,—какъ изъ тѣхъ, которыя были изданы въ Англіи, такъ и изъ тѣхъ, которыя были написаны на континентѣ. Его имя было мало извѣстно современнымъ ему англичанамъ. Валлисъ ничего не зналъ о немъ. Вслѣдствіе этого незаслуженнаго забвенія мы дадимъ о его книгѣ болѣе полный отчетъ, чѣмъ она заслуживаетъ

---

[1]) Дальнѣйшія свѣдѣнія о логариѳмическихъ таблицахъ читатель найдетъ въ статьяхъ „Tables (mathematical)“ въ Encyclopaedia Britannica, 9th Ed., въ English Cyclopaedia, въ Penny Cyclopaedia и *J. W. L. Glaisher* въ отчетѣ комитета о математическихъ таблицахъ, напечатанныхъ въ Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873, pp. 1—175.

[2]) Всѣ наши свѣдѣнія заимствованы изъ *Де-Моргановой* статьи „Tables“ въ English Cyclopaedia и изъ отчета о таблицахъ въ Report of the British Association за 1873 годъ. Когда Dict. of National Biography дойдетъ до имени Спейделя, можно будетъ надѣяться найти тамъ новыя свѣдѣнія о немъ.

по своему значенію. Полное заглавіе ея слѣдующее: *New Logarithmes. the First inuention whereof, was, by the Honourable Lo: Iohn Nepair Baron of Marchiston, and Printed at Edinburg in Scotland, Anno: 1614. In whose vse was and is required the Knowledge of Algebraicall Addition and Subtraction, according as + and — These being Extracted from and out of them (they being first ouer seene, corrected, and amended) require not at all any skill in Algebra, or Cossike numbers, But may de vsed by euery one that can onely adde and Subtract, in whole numbers, according to the Common or vulgar Arithmeticke, without any consideration or respect to + and — By John Speidell, professor of the Mathematickes; and are to be solde at his dwelling house in the Fields, on the backe side of Drury Lane, betweene Princes streete and the new Playhouse. 1619*, т. е. „новые логариѳмы, первое изобрѣтеніе которыхъ принадлежитъ достопочтенному лорду Джону Неперу, барону Марчистонскому, и которые были напечатаны въ Эдинбургѣ, въ Шотландіи, въ 1614 году. При употребленіи которыхъ требовалось и требуется знаніе алгебраическаго сложенія и вычитанія, сообразно со знаками + и —. Эти же логариѳмы, извлеченные изъ вышеупомянутыхъ, (по ихъ просмотру, исправленію и усовершенствованію) не требуютъ никакого знанія алгебры и коссическихъ чиселъ, но доступны всякому, кто только умѣетъ складывать и вычитать цѣлыя числа, сообразно съ правилами простой или обыкновенной ариѳметики безъ всякаго вниманія и отношенія къ + и —. Составлены Джономъ Спейделемъ, профессоромъ математики; и продается въ его домѣ на Поляхъ, на задней сторонѣ Дрюрійской Дороги, между Принцевой улицей и Новымъ Театромъ. 1619". Изъ этого заглавія мы узнаемъ прежде всего о профессіи автора—онъ былъ учителемъ математики; вѣроятно, у него была своя собственная школа. Очевидно, что не теоретическія, а чисто практическія соображенія заставили его измѣнить Неперовы таблицы. Онъ хотѣлъ упростить логариѳмы такъ, чтобы лица, не знающія алгебраическихъ правилъ сложенія и вычитанія, могли бы пользоваться таблицами. Введенная имъ перемѣна сводится къ тому, что онъ сдѣлалъ $\log 1 = 0$; отъ его вниманія усколь-

знуло, однако, важное приспособленіе къ арабской нумераціи, введенное въ Бригговой системѣ. Его сынъ, Евклидъ Спейдель, говоритъ, что онъ „въ концѣ-концовъ призналъ, что десятичные, или Бригговы логариѳмы являются лучшими образцовыми логариѳмами". Спейделева книга была, повидимому, издаваема въ 1620, 1621, 1623, 1624, 1627, 1628 годахъ; однако, не всѣ эти изданія принадлежатъ ему самому. Въ своемъ сочиненіи „Briefe Treatise of Sphaericall Triangles" (краткій трактатъ о сферическихъ треугольникахъ) онъ упоминаетъ о тѣхъ, которые издавали его трудъ, и жалуется на то, что они, печатая его безъ малѣйшей перемѣны, ставили ему въ упрекъ, въ своихъ предисловіяхъ, именно это отсутствіе перемѣнъ. Обращаясь къ нимъ, онъ говоритъ:

„If thou canst amend it
So shall the arte increase:
If thou canst not: commend it,
Else, preethee hould thy peace" *).

Это несправедливое отношеніе къ себѣ Спейдель приписываетъ тому, что онъ не былъ въ Оксфордѣ или Кэмбриджѣ—„not hauing seene one of the Vniuersities".

Спейдель издалъ логариѳмы какъ чиселъ (отъ 1 до 1000), такъ и синусовъ, и тѣ и другіе по основанію $e = 2{,}718\cdots$. Когда характеристика отрицательна, онъ прибавляетъ къ ней 10, но не отдѣляетъ увеличенной такимъ образомъ характеристики отъ остальныхъ цифръ никакимъ знакомъ или промежуткомъ. Такъ, для $\log \sin 21^0 30'$ дано число 899625; истинное значеніе этого логариѳма $\bar{2}.99625$. Одинъ изъ столбцовъ таблицы показываетъ, что авторъ хотѣлъ приспособить свою таблицу къ вычисленіямъ футовъ, дюймовъ и четвертей дюйма. Такъ, противъ числа 775 стоитъ 16.1.3, такъ какъ въ 775 четвертяхъ дюйма содержится 16 футовъ одинъ дюймъ и 3 четверти. Это интересный примѣръ тѣхъ усилій, которыя дѣлались время отъ времени, чтобы одолѣть неудобства, возникающія отъ употребленія различныхъ еди-

*) Если ты можешь исправить это, то такимъ образомъ искусство увеличится; если ты не можешь этого сдѣлать, то похвали это, а не то, прошу тебя, помолчи.

ничныхъ отношеній, съ одной стороны, въ системахъ мѣръ, съ другой — въ нашей системѣ обозначенія чиселъ. Внизу каждой страницы Спейдель помѣщаетъ логариѳмы 100 и 1000, нужные при вычисленіи десятичныхъ дробей.

Наиболѣе выработанная система натуральныхъ логариѳмовъ находится въ таблицахъ Вольфрама; она даетъ возможность находить натуральные логариѳмы отъ 1 до 10000 съ 48-ью десятичными знаками. Эти таблицы были напечатаны въ 1778 году въ *Sammlung* J. C. Schulze [1]). Wolfram былъ голландскій артиллерійскій поручикъ; онъ потратилъ на составленіе своей таблицы шесть лѣтъ очень тяжелаго труда. Самая полная и обширная таблица натуральныхъ логариѳмовъ была опубликована великимъ нѣмецкимъ вычислителемъ Захаріемъ Дазе (Zacharias Dase) въ Вѣнѣ, въ 1850 году. Таблицы такихъ логариѳмовъ находятся также въ Энциклопедіи Риса (Rees's Cyclopaedia, 1819), въ статьѣ „Hyperbolic Logarithms".

Усилія всѣхъ математиковъ, составлявшихъ первое время логариѳмическія таблицы, были направлены не на то, чтобы придумать прекрасную и простую теорію логариѳмовъ, но чтобы найти логариѳмы возможно болѣе полезные при вычисленіи. Въ виду этого факта, любопытно видѣть, насколько раннія системы логариѳмовъ слабы въ практическомъ отношеніи, хотя и очень интересны въ теоретическомъ. Неперъ почти напалъ на мысль о натуральныхъ логариѳмахъ, модуль которыхъ равенъ единицѣ; эта счастливая находка досталась Спейделю.

Единственнымъ соперникомъ Джона Непера въ дѣлѣ открытія логариѳмовъ могъ бы явиться швейцарецъ Joost Bürgi или Justus Byrgius (1552—1632). Въ юности своей онъ былъ часовыхъ дѣлъ мастеромъ, впослѣдствіи же былъ на обсерваторіи въ Касселѣ и въ Прагѣ съ Кеплеромъ. Онъ былъ сильный математикъ, но никакъ не могъ заставить себя опубликовать свои изслѣдованія. Кеплеръ приписываетъ ему открытіе десятичныхъ дробей и логариѳмовъ. Бюрги издалъ грубую таблицу логариѳмовъ черезъ шесть

[1]) Статья „Tables" въ English Cyclopaedia.

лѣтъ послѣ появленія *Descriptio* Непера, но, повидимому, онъ пришелъ къ мысли о своей таблицѣ и построилъ ее одновременно съ Неперомъ, если даже не раньше его [1]). Во всякомъ случаѣ онъ не позаботился своевременно опубликовать результаты своей работы и сдѣлалъ это (главнымъ образомъ, подъ вліяніемъ Кеплера) лишь тогда, когда Неперовы логариѳмы были извѣстны всей Европѣ и пользовались всеобщимъ признаніемъ.

Способы вычисленія логариѳмовъ, принятые Неперомъ, Бриггсомъ, Кеплеромъ, Влаккомъ,— ариѳметическаго характера и выводятся изъ теоріи пропорцій. Послѣ того, какъ большія логариѳмическія таблицы были уже вычислены, такіе математики, какъ Gregorius à St-o Vincentio, Ньютонъ, Николай Меркаторъ нашли, что эти вычисленія могутъ быть выполнены гораздо легче съ помощью безконечныхъ рядовъ. Изучая квадратуры, Григорій Ст. Винцентъ (1584 — 1667) нашелъ въ 1647 году замѣчательное свойство равносторонней гиперболы, связавшее гиперболическую площадь, заключенную между кривой и ея асимптотами, съ натуральными логариѳмами; благодаря этому свойству натуральные логариѳмы стали называться гиперболическими. Пользуясь имъ, Николай Меркаторъ въ 1668 году пришелъ къ логариѳмическому ряду и показалъ, какъ посредствомъ рядовъ можно привести построеніе логариѳмическихъ таблицъ къ квадратурѣ гиперболическихъ площадей [2]).

Англійскіе вѣса и мѣры.

Еще въ шестнадцатомъ столѣтіи положеніе торговли въ Англіи было очень низкое. Въ тринадцатомъ столѣтіи, благодаря неумѣнію торговать и общему невѣжеству тѣхъ временъ, проценты, взимаемые за деньги, доходили до огромныхъ размѣровъ. Были случаи, когда взимали до 50% [3]).

---

[1]) Описаніе этой таблицы см. въ *Гергардтовой* книгѣ Gesch. d. Math. in Deutschland, 1877, p. 119; см. также p. 75.

[2]) Различные способы вычисленія логариѳмовъ см. въ статьѣ „Logarithms“ въ Encyclopaedia Britannica, 9th Ed.

[3]) *Hume.* History of England, Chap. XII.

Но въ теченіе слѣдующихъ двухъ столѣтій въ этомъ отношеніи послѣдовала реакція. Не только вымогательства такого рода были запрещены закономъ, но въ царствованіе Генриха VII-го было строго запрещено законами взимать какіе бы то ни было проценты; всякого рода проценты назывались тогда ***лихвенными*** (usury). Нечего удивляться тому, что торговля не процвѣтала при этихъ новыхъ условіяхъ. Но, начиная со средины шестнадцатаго столѣтія, мы находимъ, что обидное слово ***usury*** (лихвенные проценты) стало примѣняться лишь ко взиманію непомѣрныхъ или незаконныхъ процентовъ; дозволено было взимать 10%. Та небольшая торговля, которая существовала до того времени, велась, главнымъ образомъ, ганзейскими купцами — ихъ называли тогда Истерлингами (Easterlings) [1]).

Но во второй половинѣ пятнадцатаго столѣтія былъ введенъ въ употребленіе порохъ, изобрѣтено было искусство книгопечатанія, открыта была Америка. Міровая жизнь пошла быстрѣе и стала напряженнѣе. Даже въ Англіи колеса торговли пришли въ движеніе. Въ шестнадцатомъ столѣтіи англійская торговля оживилась. Англичане стали ощущать необходимость въ нѣкоторой подготовкѣ для дѣловыхъ людей. Ариѳметика и бухгалтерія были введены въ Великобританіи.

Вопросы, относящіеся къ монетамъ, мѣрамъ и вѣсамъ, должны были по необходимости обратить на себя нѣкоторое вниманіе даже и въ полу-цивилизованной общинѣ. Стараясь прослѣдить ихъ исторію, мы находимъ слѣды римскаго вліянія не только въ мѣрахъ и вѣсахъ, но даже и въ англійскихъ монетахъ. Саксы усовершенствовали римскую монетную систему. Монетная система Вильгельма Завоевателя была, повидимому, построена по плану, принятому Карломъ Великимъ въ восьмомъ столѣтіи; какъ полагаютъ, дѣленіе фунта на 20 шиллинговъ и шиллинга на 12 пенни было заимствовано у римлянъ. Тѣ же отношенія были сохранены въ итальянской *lira*, испанской *libra* и французской *livre* — мѣрахъ, которыя всѣ вышли теперь изъ упо-

---

[1]) *Hume.* History of England, Chap. XXXV.

требленія. Фунтъ, принятый Вильгельмомъ Завоевателемъ, былъ саксонскій *Moneyer's* или *Tower* pound, содержащій 5400 гранъ [1]). Слѣдуетъ замѣтить, что растительное царство доставило первоначальную единицу массы „гранъ“ (grain — зерно). Вѣсовой фунтъ и денежный фунтъ (pound in tale, т. е. счетный фунтъ) не отличались другъ отъ друга. Количество серебра вѣсомъ въ одинъ фунтъ считалось имѣющимъ стоимость въ одинъ монетный фунтъ. Это объясняетъ двойное значеніе слова „фунтъ“,— во-первыхъ, въ смыслѣ вѣсовой единицы, во-вторыхъ, въ смыслѣ монетной. Позднѣе для взвѣшиванія драгоцѣнныхъ металловъ стали употреблять Тройскій фунтъ (Troy pound, 5760 гранъ); Тройскій фунтъ серебра заключалъ бы поэтому $21\frac{1}{3}$ шиллинга такого рода, какъ мы упомянули выше. Между тринадцатымъ столѣтіемъ и началомъ шестнадцатаго шиллингъ уменьшился и дошелъ до $\frac{1}{3}$ своего прежняго вѣса. Такая перемѣна была бы, по всей вѣроятности, бѣдствіемъ, если бы не установился, повидимому, обычай платить по вѣсу, а не по счету. Если исключить одинъ короткій промежутокъ времени, то можно сказать, что допускались лишь очень небольшія измѣненія въ чистотѣ новаго шиллинга. Въ 1665 году, въ царствованіе Карла II, Тройскій фунтъ серебра давалъ 62 шиллинга, въ 1816 году онъ давалъ 66 шиллинговъ [2]). Иногда правительства прибѣгали къ финансовой уловкѣ, состоящей въ пониженіи стоимости находившейся въ обращеніи монеты посредствомъ выпуска новыхъ монетъ, содержавшихъ менѣе серебра или золота, чѣмъ старыя, но имѣвшихъ ту же *номинальную* стоимость. Къ такой уловкѣ прибѣгнулъ Генрихъ III, выпуская монеты, въ которыхъ количество серебра было уменьшено сначала на $\frac{1}{6}$, затѣмъ на $\frac{1}{2}$ и, наконецъ, на $\frac{2}{3}$. Въ царствованіе Эдуарда VI количество серебра было уменьшено на $\frac{3}{4}$, такъ что монета содержала только $\frac{1}{4}$ стараго количества серебра. Черезъ семнадцать лѣтъ послѣ перваго

---

[1]) *P. Kelly*. Universal Cambist, London, 1835, Vol. I, p. 29. Многія изъ приводимыхъ нами свѣдѣній касательно англійскихъ монетъ, вѣсовъ и мѣръ, заимствованы изъ этой книги.

[2]) *Kelly*. Vol. I, p. 29.

изъ этихъ выпусковъ королева Елисавета изъяла изъ обращенія низкопробную монету и пустила въ обращеніе монету старой пробы. Опытъ Генриха VIII былъ настоящимъ бѣдствіемъ для Англіи и свелъ ее „съ положенія первоклассной Европейской державы на положеніе третьестепеннаго государства болѣе, чѣмъ на цѣлое столѣтіе“ [1]).

Интересно происхожденіе нѣкоторыхъ словъ, употребляемыхъ въ связи съ англійской монетной системой. Слово *стерлингъ* (sterling) было, повидимому, введено ганзейскими купцами въ Лондонѣ. „Во время . . . короля Ричарда I явился особенный спросъ на монеты, отчеканенныя въ восточныхъ частяхъ Германіи; монеты эти славились своей чистотой и назывались *Easterling* monie (восточная монета), подобно обитателямъ этихъ странъ, которые также назывались *Истерлингами;* вскорѣ послѣ этого нѣкоторые жители этой страны, свѣдущіе въ монетномъ дѣлѣ . . ., были призваны въ нашу страну для усовершенствованія этого дѣла; съ этого времени они стали давать новой монетѣ названіе *стерлингъ,* вмѣсто *Истерлингъ*“ (Кэмденъ) *). На старыхъ серебряныхъ пенни или стерлингахъ былъ выбитъ глубокій крестъ. Монета ломалась на четыре части, изъ которыхъ каждая называлась *fourth-ing* или *farthing* (четвертка, fourth — четвертый, ing — уменьш.). Серебряныя монеты большаго размѣра, стоимостью въ четыре пенни, появились впервые въ царствованіе Эдуарда III. Ихъ называли *greats* или *groats* (гроты — большія). Въ 1663 году, въ царствованіе Карла II, были выпущены новыя золотыя монеты; $44\frac{1}{2}$ штуки такого рода вѣсили одинъ Тройскій фунтъ. Они были названы *гинеями* (guinea), по имени новой страны на западномъ бе-

---

[1]) Статья „Finance“ въ Encyclopaedia Britannica, 9th Ed. Сравни также *Francis A. Walker,* Money, Chaps. X. and XI.

*) „In the time of . . . King Richard I, monie coined in the east parts of Germanie began to be of especiall request in England for the puritie thereof, and was called *Easterling* monie, as all the inhabitants of those parts were called *Easterlings,* and shortly after some of that countrie, skillful in mint matters, . . . were sent for into this realme to bring the coine to perfection; which since that time was called of them *sterling,* for *Easterling*“ (Camden).

регу Африки, откуда привезено было золото [1]. Стоимость гинеи колебалась между 20 или 30 шиллингами до 1717 г., когда, по совѣту сэра Исаака Ньютона, она была установлена въ 21 шиллингъ, въ каковой цѣнѣ держится и теперь [2].

Исторія мѣръ вѣса обнаруживаетъ тотъ любопытный фактъ, что какъ у индусовъ и египтянъ, такъ и у итальянцевъ, англичанъ и другихъ европейцевъ основной единицей вѣса служило обыкновенно *ячменное зерно;* оно было также любимой единицей длины. Низшее подраздѣленіе фунта или другихъ подобныхъ единицъ опредѣлялось обыкновенно тѣмъ, что вѣсило столько же, сколько извѣстное число ячменныхъ зеренъ. Очевидно, что при такомъ выборѣ основной единицы вѣса нельзя было достигнуть и держаться большой степени точности. Благодаря повсемѣстному изученію сочиненій греческихъ врачей въ Европѣ были повсюду приняты греческія подраздѣленія *литры,* или фунта. Фунтъ содержалъ 12 *унцій* (англ. *ounces*); низшими подраздѣленіями фунта были *драхма* (*drachm,* или *dram* — „горсть"), *грамма* („малый вѣсъ") и *гранъ* (англ. *grain* — „зерно") [3]. Римляне перевели слово *gramma* словомъ *scriptulum* или *scrupulum,* откуда произошло наше слово „скрупулъ" (англ. scruple). Слово *граммъ* было принято въ метрической системѣ. У грековъ былъ и второй фунтъ въ 16 унцій, носившій названіе *мины*. Обычай подраздѣлять фунты, какъ по двѣнадцатиричной системѣ, такъ и раздваивая ихъ послѣдовательно

---

[1] *Thomas Dilworth* въ своемъ сочиненіи Schoolmaster's Assistant, 1784 (первое изданіе около 1743 г.), хвалитъ англійское золото въ слѣдующихъ словахъ; p. 89: „In England, Sums of Mony are paid in the best Specie, viz., Guineas, by which Means 1000 l or more may be put into a small Bag, and conveyed away in the Pocket; but in Sweden they often pay Sums of Mony in Copper, and the Merchant is obliged to send Wheelbarrows instead of Bags to receive it", т. е. въ Англіи суммы денегъ уплачиваются монетами лучшаго качества, а именно гинеями, такъ что 1000 или болѣе фунтовъ можно положить въ маленькій мѣшокъ и спрятать въ карманъ; въ Швеціи же денежныя суммы часто уплачиваются мѣдью, и купецъ для полученія ихъ принужденъ посылать тачки вмѣсто мѣшковъ.

[2] *Kelly,* Vol. I, p. 30.

[3] *Peacock,* p. 444.

четыре раза, принадлежитъ поэтому древнему времени. Въ средніе вѣка въ Европѣ было почти безконечное разнообразіе фунтовъ различныхъ размѣровъ; также разнообразны были и средневѣковые футы, но слова „фунтъ“ и „футъ“ или равнозначащія имъ слова были приняты во всѣхъ языкахъ, что указываетъ на общее происхожденіе этихъ мѣръ. Различные фунты обыкновенно раздѣлялись на 16 унцій, иногда же на 12. Слово „фунтъ“, по англійски „pound“, происходитъ отъ латинскаго слова *pondus*. Слово „унція“ (латинское *uncia*) значитъ „двѣнадцатая часть“. Англійское слово „ounce“ (унція) и „inch“ (дюймъ) имѣютъ одно и то же происхожденіе; первая мѣра называлась по латыни *uncia librae* (*libra*, фунтъ), вторая *uncia pedis* (*pes*, футъ) [1].

До нормандскаго завоеванія въ Англіи существовали хорошіе законы относительно образцовыхъ вѣсовъ и мѣръ (какъ разсказываетъ одинъ старый епископъ), но законы эти какъ тогда, такъ и впослѣдствіи плохо соблюдались. Саксонскій Башенный фунтъ (Saxon Tower pound) былъ удержанъ Вильгельмомъ Завоевателемъ и служилъ сначала и монетной и вѣсовой единицей. Размѣръ фунта, употреблявшагося въ Англіи, мѣнялся нѣсколько разъ. Сверхъ того, нѣсколько различныхъ родовъ фунта было въ употребленіи для различныхъ цѣлей въ одно и то же время. Серьезное вниманіе на этотъ предметъ обращено было, повидимому, впервые въ 1266 году, въ 51 статутѣ Генриха III, когда опредѣлено было, что, „съ согласія всего англійскаго государства . . . англійское пенни, называемое стерлингомъ, круглое и безъ обрѣзки, должно вѣсить столько же, сколько 32 пшеничныхъ зерна, взятыхъ въ серединѣ колоса, а 20 пенни должны составить унцію, 12 унцій — фунтъ, 8 фунтовъ — галлонъ вина, а 8 галлоновъ вина должны составлять лондонскій бушель — восьмую часть четверти“. Согласно сказанному, фунтъ составлялъ по вѣсу столько же, сколько 7680 пшеничныхъ зеренъ, и вполнѣ этимъ опредѣлялся. Сверхъ того, серебряная монета принималась, повидимому, по вѣсу, а не по нарицательной цѣнѣ. Безъ сомнѣнія, было очень неудобно

---

[1] *Kelly*, Vol. I, p. 20.

имѣть дѣло со столь плохо установленнымъ образцомъ вѣса. Мы полагаемъ, что опредѣленный выше фунтъ и былъ Тауэръ-фунтъ. Въ 1527 году по статуту 18 Генриха VIII Тауэръ-фунтъ, употреблявшійся преимущественно для драгоцѣнныхъ металловъ, былъ упраздненъ, и на его мѣсто былъ введенъ Трой-фунтъ. Самый ранній указъ, упоминающій о Тройскомъ фунтѣ, относится къ 1414 г.; это статутъ 2 Генриха V; вопросъ о болѣе раннемъ его происхожденіи подлежитъ спору. Старый Тауэръ-фунтъ составлялъ $\frac{15}{16}$ Тройскаго фунта. Обыкновенно полагаютъ, что слово *Troy* происходитъ отъ *Troyes* во Франціи, гдѣ прежде бывала знаменитая ярмарка; и гдѣ употреблялся этотъ фунтъ. Англійскій Комитетъ вѣсовъ и мѣръ (1758 г.) былъ того мнѣнія, что слово Troy произошло отъ монашескаго имени *Troynovant;* такъ называли Лондонъ, основываясь на легендѣ о Брутѣ [1]). По этому толкованію Тройскій вѣсъ означаетъ „Лондонскій вѣсъ". Около этого же времени былъ, вѣроятно, установленъ вѣсъ авёрдьюпойзъ для тяжелыхъ товаровъ. Обыкновенно полагаютъ, что названіе это произошло отъ французскаго *avoir-du-pois,* какъ писали неправильно вмѣсто *avoir-de-pois,* что значитъ „тяжелый товаръ" [2]). Въ первыхъ статутахъ, въ которыхъ употребляется слово avoirdupois (9 Эдуарда III, въ 1335 г., и 27 Эдуарда III, въ 1353 г.), оно прилагается къ самымъ товарамъ, а не къ системѣ вѣсовъ. Въ послѣднемъ изъ упомянутыхъ статутовъ сказано: „понеже слышали мы, что нѣкоторые купцы покупаютъ шерстяные и иные товары avoirdupois по одному вѣсу, а продаютъ по другому, . . . посему повелѣваемъ мы и уста-

---

[1]) По миѳологической исторіи, Брутъ былъ потомкомъ Энея изъ древней Трои; убивъ нечаянно своего отца, онъ убѣжалъ въ Британію, основалъ Лондонъ и назвалъ его *Troy-novant* (Новая Троя). Спенсеръ пишетъ въ „Faery Queen" III, 9:

For noble Britons sprong from Trojans bold
And Troy-novant was built of old Troyes ashes cold.

(Ибо благородные Британцы произошли отъ храбрыхъ Троянцевъ, и Новая Троя возникла изъ пепла старой Трои). См. *Brewer's*. Dic. of Phrase and Fable.

[2]) *Murray's*. English Dictionary.

навливаемъ, чтобы во всей странѣ были одинъ вѣсъ, одна мѣра и одинъ ярдъ, . . . и чтобы шерстяные товары и иного рода avoirdupois взвѣшивались . . .". 24 статутомъ Генриха VIII, 1532 г., указано было, что „говядина, свинина, баранина и телятина должны продаваться по вѣсу, называемому haverdupois" [1]). Здѣсь слово это означаетъ вѣсъ. Въ анонимной ариѳметикѣ, изданной въ 1596 г. и озаглавленной „The Pathway of Knowledge" (путь къ знанію), сказано, что фунтъ haberdepois раздѣляется на 16 унцій, каждая унція на 8 драхмъ, каждая драхма на 3 скрупула, каждый скрупулъ на 20 гранъ [*]). Этотъ фунтъ содержитъ то же число (7680) гранъ, что и фунтъ, установленный статутомъ 1266 г., и такъ же подраздѣляется на унціи, драхмы и скрупулы, какъ нашъ теперешній аптекарскій вѣсъ. Число гранъ въ пенниуэйтѣ (pennyweight — вѣсъ пенни) стараго фунта измѣнено было съ 32 до 24, такъ что число гранъ въ фунтѣ стало равно 5760. Намъ неизвѣстно, когда и зачѣмъ была сдѣлана эта перемѣна. Коккеръ, Уингэтъ и другіе говорятъ въ своихъ ариѳметикахъ, „что 32 *пшеничныхъ зерна* составляютъ 24 *искусственныхъ грана*" (32 *grains of wheat* make 24 *artificial grains*) [2]). Нашъ аптекарскій вѣсъ, какъ полагаютъ [3]), имѣетъ слѣдующее происхожденіе: лѣкарства выдавали прежде въ старыхъ подраздѣленіяхъ фунта (данныхъ въ „Pathway of Knowledge"); такъ продолжали поступать и послѣ того, какъ старый фунтъ былъ замѣненъ образцовымъ фунтомъ (съ 24 гранами вмѣсто 32 въ одномъ пенниуэйтѣ), который, по повелѣнію королевы Елисаветы, былъ положенъ на храненіе въ государственное казначейство въ 1588 году. Такимъ образомъ, существовало два различныхъ фунта avoirdupois, старый и новый. Новый фунтъ королевы Елисаветы мало отличался отъ стараго торговаго фунта и, вѣ-

---

[1]) *Johnson*. Universal Cyclopaedia, статья „Weights and Measures".

[*]) „Pound haberdepois is parted into 16 ounces; every ounce 8 dragmes, every dragme 3 scruples, every scruple 20 grains".

[2]) *Cocker*. Arithmetic, Dublin, 1714, p. 13; *Wingate*. Arithmetick (*George Shelley's* Ed.), 16th Ed, 1735, p. 7.

[3]) См. статью „Weights and Measures" въ Penny или English Cyclopaedia.

роятно, отъ него и произошелъ [1]). Слѣдуетъ замѣтить, что до пятнадцатаго столѣтія и даже позже въ Англіи пользовались для торговыхъ цѣлей Амстердамскимъ вѣсомъ, употреблявшимся тогда въ другихъ частяхъ Европы, а также въ Остъ-Индіи и въ Вестъ-Индіи [2]). Въ Шотландіи этотъ вѣсъ употреблялся отчасти еще [въ нашемъ столѣтіи [*]), въ Англіи же имъ пользовались до 1815 года при опредѣленіи таксы на хлѣбъ [2]) Исторія этого вѣса краснорѣчиво говоритъ о распространеніи голландской торговли въ раннія времена.

Упоминаютъ еще и о другого рода фунтахъ, употреблявшихся въ Великобританіи [3]). Разнообразіе ихъ смущаетъ и ставитъ въ тупикъ историка; о происхожденіи ихъ и относительной ихъ величинѣ неизвѣстно ничего положительнаго. Фунтъ, имѣвшій опредѣленное названіе, могъ, напримѣръ, имѣть разное значеніе въ разныхъ мѣстахъ. Въ сочиненіи „Pathway of Knowledge“, 1596 г., дано пять различныхъ родовъ фунта, бывшихъ въ употребленіи: фунты Tower, Troy, „haberdepoys“, subtill, foyle. Фунтомъ subtill (тонкимъ) пользовались пробирщики, фольговый фунтъ (foyle pound) составлялъ $\frac{4}{5}$ Трой-фунта и употреблялся для взвѣшиванія золотой фольги (foil), проволоки и жемчуга. При торговлѣ золотой фольгой и проволокой рабочій, вѣроятно, зарабатывалъ, продавая $\frac{4}{5}$ фунта по цѣнѣ одного фунта слитка. Много разнообразныхъ мѣръ возникло въ связи съ обычаемъ купцовъ измѣнять, вмѣсто *цѣны* опредѣленнаго количества товара, *количество* товара, соотвѣтствующаго опредѣленному вѣсовому наименованію (напримѣръ, фунту), ходящему по опредѣленной цѣнѣ [4]).

---

[1]) „Weights and Measures“ въ Penny или въ English Cyclopaedia.

[2]) *Kelly*. Vol II, p. 372, прим.

[*]) т. е. въ 19 столѣтіи.

[3]) *Dilworth* въ своемъ сочиненіи Schoolmaster's Assistant, 1784, p. 38, говоритъ: „сырой, длинный, короткій, китайскій, морейскій шелкъ и проч. взвѣшиваютъ посредствомъ большого фунта въ 24 унціи, хорьковый же, невыдѣланный, рукавный шелкъ — посредствомъ обыкновеннаго фунта въ 16 унцій.

[4]) „Weigts and Measures“ въ English Cyclopaedia.

Древнія мѣры длины представляли обыкновенно размѣры различныхъ частей человѣческаго тѣла, какъ видно изъ названій: локоть (cubit), футъ (foot, голланд. pot — ступня ноги), digit (палецъ, ср. дюймъ, гол. duim, нѣм. daum — суставъ пальца), пальма (palm — ладонь), пядь (span) и сажень (fathom). Позднѣе единицы длины опредѣлялись другими способами, напримѣръ, шириной (или длиной) ячменныхъ зеренъ; длина опредѣлялась также по отношенію къ какому-нибудь произвольно выбранному образцу, тщательно охранявшемуся правительствомъ. Локоть гораздо древнѣе фута. Онъ былъ въ употребленіи у египтянъ, ассиріянъ, вавилонянъ и израильтянъ. Имъ пользовались при построеніи гизехской пирамиды,—можетъ быть, за 3500 лѣтъ до Р. Х. Футъ употреблялся у грековъ и римлянъ. Римскій футъ (= 11.65 англійскаго дюйма) раздѣлялся иногда на 12 *unciae* (анг. inches — дюймовъ), обыкновенно же онъ раздѣлялся на 4 *пальмы* (ладони — ширина руки, считаемая черезъ середины пальцевъ), каждая же ладонь подраздѣлялась на 4 *digiti* (ширина пальца). Футовыя линейки, находимыя въ римскихъ развалинахъ, раздѣлены обыкновенно такимъ способомъ на digiti [1]). Какъ римляне, такъ и древніе египтяне тщательно сохраняли образцы своихъ мѣръ, но въ теченіе среднихъ вѣковъ возникло большое разнообразіе футовъ различной длины.

Какъ сказано было раньше, англичане, подобно индусамъ и евреямъ, пользовались ячменными или пшеничными зернами для опредѣленія единицъ длины и вѣса. Слѣдуетъ считать исключеніемъ тотъ фактъ, если только онъ вѣренъ, что Генрихъ I повелѣлъ, чтобы ярдъ имѣлъ длину его руки. Говорятъ, что саксонскій ярдъ содержалъ 39.6 дюймовъ, и что въ 1101 году Генрихъ I укоротилъ его, сдѣлавъ равнымъ длинѣ своей руки. Самый ранній англійскій статутъ, въ которомъ говорится объ единицахъ длины, былъ изданъ въ 1324 г. (17 Эдуарда II); въ силу этого статута „три ячменныхъ зерна, круглыя и сухія, составляютъ дюймъ, 12 дюймовъ — футъ, 3 фута — ярдъ“. Здѣсь за единицу принята

[1]) *De Morgan.* Arith. Books, p. 5.

длина ячменнаго зерна; позднѣе, въ шестнадцатомъ столѣтіи, европейскіе писатели принимали за единицу ширину зерна; такъ, 64 зерна, взятыя по ширинѣ, составляютъ одинъ „геометрическій“ футъ (Clavius). Ширина зерна была, безъ сомнѣнія, болѣе опредѣленной величиной, чѣмъ длина, выраженіе „круглыхъ“ въ законѣ 1324 г. дѣлаетъ длину зерна особенно неопредѣленной: можно подозрѣвать, что острые концы зерна должны были быть предварительно отрѣзаны, и неизвѣстно, насколько при этомъ сокращалась его длина.

Казалось бы, что всѣ честные люди должны были бы заботиться объ однообразіи мѣръ; однако же, британское правительство всегда испытывало величайшія затрудненія въ установленіи такого однообразія. Конечно, предписанія закона часто увеличивали безпорядокъ. Такъ, въ 1437 году по 15 статуту Генриха VI, эльнеджеръ (alnager), или мѣрщикъ эллемъ (ell — мѣра длины около аршина), долженъ былъ „пріобрѣтать для собственнаго употребленія веревку двѣнадцати ярдовъ и двѣнадцати дюймовъ длины, прибавляя по четверти дюйма на каждую четверть ярда“. Этотъ законъ отмѣчаетъ эпоху, въ которую производство шерстяныхъ издѣлій пріобрѣло особую важность; цѣлью этого закона было регламентировать установившійся къ тому времени обычай прибавлять по ширинѣ большого пальца на каждый ярдъ на тотъ случай, если матерія сядетъ. Въ 1487 году, какъ бы въ отмѣну этого закона, повелѣно было, чтобы „матеріи смачивались до измѣренія и снова уже не растягивались“, но впослѣдствіи опять стали слѣдовать старому статуту [1]).

До 1701 г. между мѣрами длины и емкости не существовало никакого опредѣленнаго отношенія. Изданный въ этомъ году статутъ объявляетъ, что Винчестерскій бушель долженъ быть круглымъ съ плоскимъ дномъ, ширина его должна быть повсюду $18\frac{1}{2}$ дюймовъ, а глубина 8 дюймовъ. Мѣры емкости были болѣе разнообразны, чѣмъ мѣры длины и вѣса, несмотря на то, что въ законахъ короля Эдгара, изданныхъ почти за цѣлое столѣтіе до нормандскаго завоеванія, находится

---

[1]) North American Review, No XCVII, October, 1837.

повелѣніе пользоваться во всемъ государствѣ одной мѣрой — Винчестерской. Тяжелые штрафы налагались впослѣдствіи на тѣхъ, кто употреблялъ бушели не установленнаго образца, но это ни къ чему ни приводило. Исторія [1]) виннаго галлона ясно показываетъ, насколько образцы мѣръ подвержены опасности поврежденія. По статуту Генриха III существовалъ только одинъ законный галлонъ — винный галлонъ. Однако, около 1680 г. было открыто, что въ теченіе долгаго времени виноторговцы, ввозившіе вино, платили пошлины за галлоны, содержавшіе отъ 272 до 282 куб. дюймовъ, а продавали вино галлонами, содержавшими отъ 224 до 231 куб. дюймовъ.

Британскій Комитетъ о вѣсахъ и мѣрахъ, собравшійся въ 1758 г., повидимому, считалъ положеніе дѣла объ установленіи однообразныхъ мѣръ — отчаяннымъ: „многократныя попытки законодательства“, говоритъ Комитетъ, „начиная съ Великой Хартіи, — установить одинъ и тотъ же вѣсъ и одну и ту же мѣру во всемъ государствѣ — никогда не имѣли никакихъ послѣдствій; поэтому нельзя ожидать, повидимому, многаго отъ новой попытки призвать къ жизни тѣ мѣры, негодность которыхъ доказана опытомъ“. Во второй половинѣ восемнадцатаго и въ первой половинѣ девятнадцатаго столѣтія въ Англіи широко распространились научно-опредѣленные и тщательно выдѣланные образцы мѣръ. Тѣмъ не менѣе еще въ 1871 году было заявлено въ Парламентѣ, что въ нѣкоторыхъ частяхъ Англіи употреблялись различные роды вѣсовъ, при продажѣ различнаго рода товаровъ, и что въ Шропширѣ употреблялись даже различные вѣса для взвѣшиванія одного и того же товара въ различные базарные дни [2]).

Ранняя исторія нашихъ вѣсовъ и мѣръ обнаруживаетъ тотъ фактъ, что образцы ихъ выбирались обыкновенно самимъ народомъ, и что только въ позднѣйшій періодъ правительства вмѣшивались въ это дѣло и утверждали законами нѣкоторыя изъ тѣхъ мѣръ, которыя уже вошли въ употребленіе, и объявляли незаконными всѣ другія. Мѣры, возни-

---

[1]) North American Review, No. XCVII.

[2]) *Johnson's.* Universal Cyclop., Art. „Weights and Measures“.

кающія непосредственно изъ практическихъ потребностей людей, принадлежащихъ къ извѣстнымъ профессіямъ, имѣютъ обыкновенно то преимущество, что обладаютъ удобными для практики размѣрами. Фёрлонгъ (furlong—furrow-long—длина борозды, $\frac{1}{8}$ английской мили, стадія) приблизительно равенъ средней длинѣ борозды (furrow); галлонъ и хогсхедъ (hogshead — около 60 галлоновъ, бочка) имѣютъ размѣры, хорошо приспособленные къ практическому ихъ употребленію: съ точки зрѣнія сапожниковъ ячменное зерно являлось довольно удобнымъ подраздѣленіемъ дюйма при измѣреніи длины ступни — фута. Очень замѣчательный примѣръ того, какъ выбирались единицы длины въ связи съ практическими удобствами измѣренія, данъ Де Моргановъ[1]. Чтобы удобнѣе вычислять работу прядильщицъ, мѣшокъ шерсти раздѣлялся на 13 тодовъ (tods) по 28 фунтовъ въ каждомъ, или на 364 фунта. Такимъ образомъ, считая по фунту на каждый день, на мѣсяцъ приходился одинъ тодъ и на годъ одинъ мѣшокъ. При этомъ воскресеній и праздниковъ, повидимому, не считали. Усталая прядильщица должна была, какъ кажется, работать въ сверхурочные часы по другимъ днямъ, чтобъ заслужить праздникъ. По поводу книги „The Boke of Measuryng of Lande" („Книга объ измѣреніи земли"), которую написалъ, около 1539 г., Sir Richarde de Benese, Де Морганъ говоритъ слѣдующее[1]: „Въ акрѣ 4 руты (roods), въ каждой рутѣ 10 *daye-workes* (дневныхъ работъ), въ каждомъ дэй-веркѣ 4 перча (perches). Такимъ образомъ, такъ какъ въ акрѣ 40 дэй-верковъ, по 4 перча въ каждомъ, а въ маркѣ 40 гротовъ по 4 пенни въ каждомъ, то денежная и земельная аристократія легко понимали другъ друга". Въ такихъ системахъ, какъ французская, построенныхъ систематически на десятичномъ основаніи, обыкновенно не существуетъ простыхъ отношеній между единицами времени и количества работы и заработной платы. Это единственное серьезное возраженіе, которое можно привести противъ такой системы, какъ метрическая. Съ другой стороны, въ старыхъ системахъ приходится приспособлять единицы къ

---

[1]) Arithmetical Books, p. 18.

новымъ потребностямъ каждый разъ, какъ какое-нибудь открытіе производитъ перемѣны въ способахъ работы или даетъ сбереженіе времени; приходится изобрѣтать новыя единицы каждый разъ, какъ возникаетъ новый родъ торговли. Въ противномъ случаѣ системы, построенныя по старому плану, являются, если не въ десять тысячъ разъ, то въ семь тысячъ шестьсотъ сорокъ семь разъ худшими, чѣмъ метрическая система. Съ другой стороны, старый способъ выбора единицъ приводитъ къ безконечному разнообразію ихъ и къ такимъ дикимъ фактамъ, какъ то, что 7.92 дюймовъ = 1 линку (link — звено), $5\frac{1}{2}$ ярдовъ = 1 роду, $16\frac{1}{2}$ футовъ = 1 полю (pole — шестъ), 43560 кв. футовъ = 1 акру, $1\frac{1}{3}$ хогсхеда = 1 пёнчу (punch).

Преимущества однообразной системы вѣсовъ и мѣръ, совпадающей съ арабской системой обозначенія чиселъ, допускаются всѣми тѣми, кто подвергалъ этотъ вопросъ надлежащему разсмотрѣнію. Между старыми англійскими писателями, имена которыхъ связаны съ попытками реформъ такого рода, находятся Эдмундъ Гёнтеръ и Генри Бриггсъ. Въ теченіе одного года они были коллегами въ Грешамъ Колледжѣ въ Лондонѣ и, безъ сомнѣнія, толковали иногда объ этомъ предметѣ. Бриггсъ раздѣлялъ градусъ на 100 минутъ вмѣсто 60; Гёнтеръ раздѣлялъ мѣрную цѣпь (chain) на 100 звеньевъ (links) и выбиралъ ее такой длины, чтобы „легче производить ариѳметическую работу; ибо какъ 10 относится къ ширинѣ, выраженной въ цѣпяхъ, такъ длина, выраженная въ цѣпяхъ, относится къ площади въ акрахъ" *). Такимъ образомъ, $\frac{1}{10}$ произведенія длины и ширины (выраженныхъ въ цѣпяхъ) прямоугольника даетъ его площадь въ акрахъ.

Вѣнцомъ всѣхъ попытокъ реформы вѣсовъ и мѣръ является метрическая система. Она появилась въ тѣ времена, когда французы возстали и съ ужасающимъ единодушіемъ порѣшили разрушить всѣ свои старыя установленія, а на развалинахъ ихъ насадить новый порядокъ вещей. Оконча-

---

*) „The work be more easie in arithmetick; for as 10 to the breadth in chains, so the length in chains to the content in acres".

тельно принятая во Франціи въ 1799 г. метрическая система въ теченіе настоящаго столѣтія вытѣснила старыя системы почти во всѣхъ цивилизованныхъ государствахъ, за исключеніемъ тѣхъ странъ, гдѣ говорятъ по-английски. Система эта такъ легка и обладаетъ такимъ превосходствомъ, что опыты введенія ея нигдѣ не встрѣчали серьезныхъ препятствій. Наиболѣе противились ея введенію сами французы. Та легкость, съ которой была выполнена реформа въ другихъ странахъ въ новѣйшія времена, объясняется въ большой мѣрѣ тѣмъ фактомъ, что метрическая система до введенія ея въ этихъ странахъ преподавалась во многихъ школахъ.

Возникновеніе Школы коммерческой ариѳметики въ Англіи.

До шестнадцатаго столѣтія англичане, благодаря своей культурной отсталости, мало занимались развитіемъ ариѳметики. Въ четырнадцатомъ столѣтіи стали появляться въ Великобританіи индусскіе числовые знаки. Въ тринадцатомъ столѣтіи мы находимъ только одинъ примѣръ ихъ употребленія, а именно въ одномъ документѣ 1282 г., гдѣ слово[1]) *trium* написано такъ: 3 *um*. Существуетъ приказъ итальянскихъ купцовъ объ уплатѣ 40 фунтовъ, относящійся къ 1325 г.; въ текстѣ этого документа числа обозначены римскими цифрами, но на оборотной сторонѣ есть надпись, сдѣланная однимъ изъ итальянцевъ, 13χϛ, т. е. 1325. Цифра 5 появляется здѣсь въ обращенномъ и неполномъ видѣ; она напоминаетъ старую цифру 5 въ Бамбергской Ариѳметикѣ 1483 г. и 5 на апексахъ Боэтія. Цифра 2 нѣсколько напоминаетъ 2 въ Бамбергской Ариѳметикѣ. Индусскіе числовые знаки того времени настолько отличались отъ тѣхъ, которыми мы пользуемся теперь, и имѣли столь разнообразныя формы, что лица, незнакомыя съ ихъ исторіей, легко впадаютъ въ ошибки при опредѣленіи тѣхъ однозначныхъ

---

[1]) Мы заимствуемъ свѣдѣнія объ исторіи числовыхъ знаковъ въ Англіи изъ статьи: *James A. Picton.* On the Origin and History of the Numerals, 1874.

числъ, къ которымъ относятся эти знаки. Обращаетъ на себя особое вниманіе очень древній обычай обозначать 5 старой буквой ƅ. Въ обозначеніяхъ чиселъ встрѣчаются иногда любопытныя ошибки. Такъ, x2 вмѣсто 12, xxx1 или 301 вмѣсто 31. Новые числовые знаки не находятся въ книгахъ, напечатанныхъ Какстономъ, но въ сочиненіи *Myrrour of the World,* изданномъ имъ въ 1480 г., есть гравюра на деревѣ, изображающая вычислителя, сидящаго за столомъ, на которомъ лежатъ таблички съ написанными на нихъ индусскими цифрами.

Въ пятнадцатомъ столѣтіи индусскіе числовые знаки употреблялись въ Англіи довольно рѣдко. До средины шестнадцатаго столѣтія большинство купцовъ вели свои счета съ помощью римскихъ цифръ. Новые символы стали широко распространяться только послѣ выхода въ свѣтъ англійскихъ руководствъ по ариѳметикѣ. Какъ въ Италіи, такъ и въ Англіи новыя цифры вошли въ употребленіе въ торговыхъ домахъ гораздо раньше, чѣмъ въ монастыряхъ и школахъ.

Первое заслуживающее вниманія руководство по ариѳметикѣ, написанное англійскимъ авторомъ, было издано въ 1522 г. на латинскомъ языкѣ. Его написалъ *Cuthbert Tonstall* (1474—1559); единственнымъ предшественникомъ его является John Norfolk, написавшій около [1]) 1340 г. трактатъ о прогрессіяхъ. Это сочиненіе, очень невысокихъ качествъ было напечатано въ 1445 г. и переиздано Халліуэллемъ въ сборникѣ *Rara Mathematica,* въ Лондонѣ, въ 1841 г. Норфолькъ смѣшиваетъ ариѳметическія прогрессіи съ геометрическими и ограничивается самыми элементарными соображеніями.

Тонсталль учился въ Оксфордѣ, Кэмбриджѣ и Падуѣ и широко пользовался сочиненіями Пачіоли и Регіомонтано. Его ариѳметика, *De arte supputandi* [2]), перепечатывалась нѣ-

---

[1]) *W. W. R. Ball.* History of the Study of Mathematics at Cambridge, Cambridge, 1889, p. 7.

[2]) Въ этой книгѣ страницы не нумерованы. Самымъ раннимъ сочиненіемъ, въ которомъ употребляются индусскія цифры для нумераціи страницъ, является книга, напечатанная въ Кельнѣ въ 1471 г. См. *Unger,* p. 16, и *Kästner,* Vol. I, p. 94.

сколько разъ въ Англіи и во Франціи, и, однако же, она осталась, повидимому, малоизвѣстной слѣдовавшимъ за нимъ англійскимъ писателямъ [1]). Авторъ говоритъ, что за нѣсколько лѣтъ до изданія своей книги у него были денежныя дѣла (argentariis), и, чтобы не быть обманутымъ, онъ долженъ былъ изучать ариѳметику. Онъ прочелъ все, что было написано по этому предмету на всѣхъ извѣстныхъ ему языкахъ, и потратилъ, какъ онъ говоритъ, много времени на вылизываніе того, что онъ тамъ нашелъ, *ad ursi exemplum*, подобно тому, какъ медвѣдица вылизываетъ своихъ медвѣжатъ. По словамъ Де Моргана [2]) эта книга — „несомнѣнно самая классическая изъ всѣхъ написанныхъ по этому предмету по латыни, какъ по чистотѣ стиля, такъ и по достоинству содержанія". Авторъ этой книги, получивъ назначеніе на епископскую каѳедру въ Лондонѣ, прощается въ ней съ науками. Современный критикъ могъ бы сказать, что въ этой ариѳметикѣ недостаточно доказательствъ, но въ сравненіи съ большинствомъ своихъ современниковъ Тонсталль — настоящій Евклидъ. Тѣ ариѳметическіе результаты, въ которыхъ чаще встрѣчается нужда, онъ располагаетъ въ таблицы. Такъ, онъ даетъ таблицу умноженія въ формѣ квадрата, а также таблицы сложенія, вычитанія и дѣленія и кубы первыхъ 10 чиселъ.

$\frac{3}{4}$ отъ $\frac{1}{3}$ отъ $\frac{1}{2}$ онъ обозначаетъ такъ $\frac{3}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$ [2]). Интересно у него изложеніе умноженія дробей. Мы упомянемъ здѣсь предварительно, что Пачіоли (какъ и многихъ учениковъ въ наше время) сильно смущало [3]) употребленіе слова „умноженіе" въ случаѣ дробей, когда произведеніе меньше множимаго. Что „умножить" значитъ „увеличить", онъ доказываетъ изъ Писанія: „Плодитесь и размножайтесь и наполняйте землю" (Быт. I, 28); „Я умножу сѣмя твое, какъ звѣзды небесныя" (Быт. XXII, 17). Какъ же примирить это съ произведеніемъ дробей? Слѣдующимъ образомъ: единица въ произведеніи имѣетъ бо́льшую *силу* или *значеніе;* такъ, если

---

[1]) *De Morgan*. Arithmetical Books, p. 13.

[2]) *Cantor,* II, 438.

[3]) *Peacock,* p. 439.

$\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ суть стороны квадрата, то $\frac{1}{4}$ представляетъ площадь этого квадрата. Позднѣйшіе писатели встрѣчались съ той же трудностью, но не всегда удовлетворялись объясненіемъ Пачіоли. Тонсталль разсуждаетъ объ этомъ предметѣ съ рѣдкой ясностью. Онъ беретъ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$. „Если[1]) вы спросите о причинѣ, по которой это происходитъ, то я отвѣчу, что, если мы перемножимъ однихъ числителей, то окажутся перемноженными цѣлыя числа и поэтому знаменатель будетъ слишкомъ великъ. Такъ, въ данномъ примѣрѣ при умноженіи 2 на 3 получается 6, и, если бы на этомъ остановиться, то получилось бы цѣлое число; однако, такъ какъ на 3 нужно умножить не цѣлое число 2, а $\frac{2}{3}$ цѣлой единицы должны быть умножены на $\frac{3}{4}$ ея, то знаменатели этихъ частей должны быть равнымъ образомъ перемножены, такъ что въ концѣ концовъ посредствомъ дѣленія, происходящаго при умноженіи знаменателей (ибо во сколько разъ увеличивается знаменатель, во столько разъ уменьшаются части), увеличеніе числителя возмѣщается во столько разъ, во сколько разъ оно было лишнимъ, и такимъ образомъ приводится къ истинному своему значенію“.

Пикокъ приводитъ этотъ споръ, какъ любопытный примѣръ недоразумѣній, возникающихъ тогда, когда какой-нибудь терминъ, имѣющій ограниченный смыслъ, прилагается къ общему дѣйствію, истолкованіе котораго зависитъ отъ рода тѣхъ количествъ, которыя ему подвергаются. Та же трудность, которая встрѣчается при умноженіи, возникаетъ и при дѣйствіи дѣленія дробей, когда частное бываетъ больше дѣлителя. Объясненіе этого парадокса требуетъ яснаго пониманія природы дробей. Весьма естественно, что въ историческомъ развитіи науки умноженіе и дѣленіе разсматривались первоначально въ связи съ цѣлыми числами. Того же пути слѣдуетъ держаться и при обученіи юношества. Сначала даются легкія, но ограниченныя значенія словъ

---

[1]) **Мы переводимъ латинскій текстъ Тонсталля, цитированный у** *Пикока,* p. 439 *).

*) **Русскій переводъ, приведенный въ текстѣ, сдѣланъ съ англійскаго перевода Кэджори.**

умноженія и дѣленія, приложимыя къ цѣлымъ числамъ. Въ надлежащее время опытный преподаватель указываетъ учащимся на необходимость измѣненія и расширенія значеній этихъ терминовъ. Подобнаго же плана приходится держаться въ алгебрѣ при изложеніи понятія о показателяхъ. Сначала дается легкое опредѣленіе, приложимое только къ цѣлымъ положительнымъ показателямъ. Впослѣдствіи приходится находить новыя значенія для дробныхъ и отрицательныхъ показателей, такъ какъ учащійся сразу видитъ, что нелѣпо было бы говорить, напримѣръ, что въ выраженіи $x^{\frac{1}{2}}$ основаніе x берется сомножителемъ $\frac{1}{2}$ раза. Подобные вопросы часто возникаютъ при изученіи алгебры.

Конечно, Тонсталль даетъ англійскіе вѣса и мѣры, онъ также сравниваетъ англійскія деньги съ французскими и т. д.

Интересно замѣтить, что Тонсталль, желая воспрепятствовать болѣе широкому распространенію въ народѣ Тиндалева перевода Новаго Завѣта, какъ говорятъ, купилъ однажды и сжегъ всѣ не проданные его экземпляры. Но Тиндаль смогъ на епископскія же деньги на слѣдующій годъ выпустить въ свѣтъ второе и болѣе правильное изданіе!

Черезъ четверть столѣтія послѣ перваго появленія Тонсталлевой ариѳметики вышли сочиненія *Роберта Рекорда* (*Robert Recorde,* 1510—1558). Онъ воспитывался въ Оксфордѣ и Кэмбриджѣ и выдавался своими познаніями въ математикѣ и медицинѣ. Онъ преподавалъ ариѳметику въ Оксфордѣ, но не нашелъ тамъ поддержки, несмотря на то, что былъ выдающимся преподавателемъ этого предмета. Переселившись въ Лондонъ, онъ сдѣлался врачомъ Эдуарда VI, а потомъ занималъ такое же мѣсто при королевѣ Маріи. Его труды, повидимому, не были оцѣнены по достоинству, такъ какъ впослѣдствіи онъ былъ за долги заключенъ въ тюрьму, гдѣ и умеръ. Онъ написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ мы упомянемъ его ариѳметику, а позднѣе и алгебру. Говорятъ, что Рекордъ былъ первымъ англичаниномъ, принявшимъ и защищавшимъ теорію Коперника [1]).

[1]) *Ball*. Mathematics at Cambridge, p. 18.

Его ариѳметика *The Grounde of Artes* была издана въ 1540 г. Тогда какъ Тонсталль написалъ свою книгу по-латыни, Рекордова ариѳметика написана по-англійски. Она заключаетъ въ себѣ знаки +, —, Z; послѣднимъ символомъ онъ пользуется для обозначенія равенства. Въ своей алгебрѣ Рекордъ замѣнилъ его привычнымъ намъ знакомъ =. Этими тремя символами пользуется онъ только въ концѣ сочиненія въ статьѣ „The rule of Falsehode" (правило ложнаго положенія). Онъ говоритъ [1]) „+, что означаетъ избытокъ, а простая черточка —, безъ поперечной черты, означаетъ недостатокъ (+ whyche betokeneth too muche, as this line —, plaine without a crosse line, betokeneth too little)". Сочиненіе это написано въ формѣ діалога между учителемъ и ученикомъ. Въ одномъ мѣстѣ ученикъ говоритъ: „Я подчиняю свой умъ Вашему авторитету и принимаю за истину все, что бы Вы ни сказали (And I to youre authoritie my witte doe subdue, whatsoever you say, I take it for true)", на что учитель отвѣчаетъ, что это слишкомъ много. „Хотя я и могъ бы требовать нѣкотораго довѣрія со стороны своего ученика, однако, я не желаю пользоваться имъ безъ достаточнаго основанія (thoughe I mighte of my Scholler some credence require, yet except I shew reason, I do it not desire)". Приведенныя фразы написаны въ риѳму, которая иногда встрѣчается въ книгѣ, хотя издатель не распредѣлилъ стихи по отдѣльнымъ строчкамъ. Во всѣхъ дѣйствіяхъ даже надъ именованными числами Рекордъ повѣряетъ результаты „выбрасываніемъ 9-къ" [2]). Ученикъ жалуется, что онъ не понимаетъ основанія этого способа повѣрки. „Не больше понимаешь ты основаніе и многихъ другихъ вещей (No more doe you of manye things else)", отвѣчаетъ учитель, доказывая, что прежде, чѣмъ понять основанія искусства, слѣдуетъ выучить

---

[1]) *Cantor,* II, p. 439—441.

[2]) *Коккеръ* обращаетъ вниманіе на недостаточность такой повѣрки въ слѣдующихъ словахъ: „можно указать на тысячи (и даже на безчисленное множество) невѣрныхъ произведеній, справедливость которыхъ можетъ быть доказана такимъ способомъ; этотъ способъ повѣрки не заслуживаетъ поэтому того, чтобы ему слѣдовали". Arithmetick, 28th Ed., 1714, p. 50.

его въ ясно и сжато выраженныхъ правилахъ. Это, конечно, здравый совѣтъ. Способъ „выбрасыванія 9-окъ" легко выучить, но начинающій ученикъ не въ силахъ понять его оснований. Можно иногда сообщать ученикамъ только факты и правила, откладывая разсужденія до болѣе поздняго времени; это не противорѣчитъ правиламъ здравой педагогики. Тотъ, кто *сразу* какъ обучаетъ способу извлеченія квадратныхъ корней, такъ и сопровождаетъ изложеніе способа разсужденіями, обыкновенно достигаетъ меньшихъ успѣховъ, чѣмъ тотъ, кто излагаетъ сначала способъ производства дѣйствій, а затѣмъ учитъ разсуждать, обучая тому и другому *отдѣльно*. Мы полагаемъ, что, какъ показываетъ опытъ отдѣльныхъ лицъ и народовъ, факты занимаютъ первое мѣсто въ естественномъ порядкѣ вещей, а основаніе ихъ—второе. Такой взглядъ не оправдываетъ, однако, простого заучиванія наизусть, которое сдѣлалось всеобщимъ методомъ обученія въ Англіи послѣ времени Тонсталля и Рекорда.

Рекордъ излагаетъ тройное правило (или „золотое правило"), прогрессіи, правила смѣшенія, товарищества и ложнаго положенія. Онъ считаетъ необходимымъ *снова излагать* всѣ правила (какъ тройное правило, правило товарищества и т. д.) *для дробей*. Того же обычая держались какъ въ то время, такъ и въ теченіе послѣдующихъ 250 лѣтъ. Рекордъ особенно цѣнилъ правило ложнаго положенія („rule of Falsehode"); по его словамъ, онъ имѣлъ обыкновеніе удивлять своихъ друзей, предлагая трудные вопросы и выводя правильныя рѣшенія изъ отвѣтовъ, даваемыхъ наудачу „случайно присутствовавшими при этомъ дѣтьми или неучеными людьми" (suche children or ydeotes as happened to be in the place).

Любопытенъ тотъ фактъ, что мы находимъ у Рекорда изложеніе вычисленія съ помощью счетныхъ марокъ, „что полезно не только для тѣхъ, кто не умѣетъ читать и писать, но даже и для грамотныхъ людей, когда у нихъ нѣтъ подъ руками пера, или не на чемъ писать (whiche doth not onely serve for them that cannot write and reade, but also for them that can doe both, but have not at some times their pen or tables readie with them)". Онъ упоминаетъ о двухъ способахъ

представленія суммъ марками, *купеческомъ* и *аудиторскомъ* счетѣ (*Merchant's* и *Auditor's* account). Въ первомъ изъ нихъ 198 l., 19 s., 11 d. выражается марками (изображенными у насъ точками) слѣдующимъ образомъ:

•	⁚ • • •	= 100 + 80 фунтовъ.
•	⁚ • •	= 10 + 5 + 3 фунтовъ.
•	⁚ • • •	= 10 + 5 + 4 шиллинговъ.
•	• • • •	= 6 + 5 пенни.

Слѣдуетъ замѣтить, что четыре горизонтальныхъ строки соотвѣтствуютъ пенни, шиллингамъ, фунтамъ и двадцати фунтамъ (scores of pounds), что марки, расположенныя въ промежуточныхъ пространствахъ, означаютъ половины единицъ, соотвѣтствующихъ строчкамъ, лежащимъ непосредственно надъ ними, и что отдѣльныя марки слѣва равносильны пяти маркамъ справа [1]).

Абакомъ со счетными марками перестали пользоваться въ Испаніи и Италіи еще въ пятнадцатомъ столѣтіи. Во Франціи онъ былъ въ употребленіи во времена Рекорда, а въ Англіи и Германіи исчезъ не раньше средины семнадцатаго вѣка. Способъ вычисленія посредствомъ счетной доски встрѣчается въ англійскомъ казначействѣ (exchequer) въ послѣдній разъ въ 1676 г. Въ царствованіе Генриха I казначейство это было организовано съ опредѣленной цѣлью, а именно, какъ судебное установленіе. Оно, однако, вело и финансовыя дѣла короны. Названіе его „exchequer" происходитъ отъ раздѣленной на клѣтки (chequered) скатерти, покрывавшей столъ, на которомъ производился счетъ. Предположимъ, что шерифъ долженъ былъ дать полный годовой отчетъ пошлинъ, поступившихъ въ видѣ наличныхъ денегъ или обязательствъ („in money or in tallies"— деньгами или бирками). „Долги или дѣйствительные взносы шерифа балансировались марками, которыя клались на квадраты раздѣленнаго на клѣтки стола; марки, лежавшія на одной сторонѣ стола, изображали суммы бирокъ, приказовъ объ уплатѣ и наличныхъ денегъ, представленныхъ шерифомъ, марки же, лежавшія на

---

[1]) *Peacock*, p. 410; Пикокъ объясняетъ также *аудиторскій счетъ*.

другой сторонѣ, изображали сумму его долговъ", такъ что легко было видѣть, исполнилъ ли шерифъ свои обязательства или нѣтъ. Во времена Тюдоровъ точки, „сдѣланныя перомъ или чернилами", замѣнили марки. Точками этими пользовались до самаго 1676 г.[1]). „Бирка" (tally), на которой отмѣчались счета, была деревяннымъ прутомъ, очищеннымъ отъ коры; ее раскалывали такимъ образомъ, чтобы раздѣлить извѣстныя зарубки, сдѣланныя на ней передъ тѣмъ. Одинъ кусокъ бирки отдавался плательщику, другой хранился въ казначействѣ. Можно было легко провѣрить сдѣлку, складывая обѣ половины бирки и замѣчая, сходятся ли зарубки. Такiе бирки оставались въ употребленiи до самаго 1783 г.[2]).

Въ *Зимней Сказкѣ* (IV, 3) Шекспира шутъ затрудняется рѣшить задачу, не имѣя подъ руками счетныхъ марокъ. Яго (*Отелло*, I) выражаетъ свое презрѣнiе къ Михаилу Кассiо, говоря, что онъ, „право, великiй математикъ", и называя его „counter-caster" (вычислителемъ)[3]). Такимъ образомъ, оказывается, что старыми методами вычисленiя пользовались еще долго послѣ того, какъ индусскiе числовые знаки повсюду вошли во всеобщее употребленiе. Съ такой упорной настойчивостью держатся люди старыхъ обычаевъ!

Хотя Англiя въ теченiе шестнадцатаго столѣтiя не произвела математиковъ, которыхъ можно было бы сравнить съ такими учеными, какъ Вьета во Францiи, Ретикусъ въ Германiи и Катальди въ Италiи, тѣмъ не менѣе вѣрно, что Тонсталль и Рекордъ своими математическими сочиненiями дѣлали честь своей родинѣ. Ихъ руководства по ариѳметикѣ стоятъ выше большинства европейскихъ сочиненiй этого рода. Со времени Рекорда англичане стали выдаваться своимъ искусствомъ производить денежные счеты. „Задачи, предлагаемыя въ английскихъ книгахъ", говоритъ Де Морганъ,

[1]) Статья „Exchequer" въ *Palgrave's* Dictionary of Political Economy, London, 1894.

[2]) „Бирки цѣнились прежде по 6, теперь же по 5 процентовъ годовыхъ, при чемъ процентныя деньги уплачиваются каждые три мѣсяца". *Wingate,* Arithmetic, *Shelley's* ed., 1735, p. 407.

[3]) *Peacock,* p. 408.

„труднѣе, заключаютъ въ условіяхъ большія числа и рѣшены болѣе искусно“. Этому обстоятельству мы должны безъ сомнѣнія приписать ту готовность, съ которой оцѣнены были по достоинству десятичныя дроби, и необычайную быстроту, съ которой распространились логариѳмы. Число писателей по ариѳметикѣ въ семнадцатомъ и восемнадцатомъ столѣтіи очень велико. Среди наиболѣе выдающихся изъ старыхъ писателей послѣ Тонсталля и Рекорда можно упомянуть слѣдующихъ [1]): William Buckley, учитель математики Эдуарда VI и авторъ сочиненія *Arithmetica Memorativa* (1550); Humfrey Baker, авторъ книги *The Well-Spring of the Sciences* (источникъ наукъ — 1562); Edmund Wingate, сочиненіе котораго, *Arithmetick,* появилось около 1629 года; William Oughtred, который въ 1631 году опубликовалъ свою книгу *Clavis Mathematica*—систематическое руководство къ изученію ариѳметики и алгебры; Noah Bridges, авторъ книги *Vulgar Arithmeticke* (обыкновенная ариѳметика, 1653); Андрей Такэ (Tacquet), іезуитскій математикъ изъ Антверпена, авторъ нѣсколькихъ книгъ, среди которыхъ находятся *Arithmeticæ Theoria et Praxis* (издана въ Антверпенѣ въ 1656 г., впослѣдствіи перепечатана въ Лондонѣ). Слѣдуетъ упомянуть также о книгѣ *The Pathway of Knowledge* (путь къ знанію), анонимномъ сочиненіи, написанномъ по-голландски и переведенномъ на англійскій языкъ въ 1596 году. John Mellis въ 1588 г. выпустилъ въ свѣтъ первое англійское сочиненіе по двойной бухгалтеріи [2]).

Мы видѣли, что изобрѣтеніе книгопечатанія обнаружило въ Европѣ существованіе двухъ ариѳметическихъ школъ, *альгористической школы,* обучавшей правиламъ вычисленія и коммерческой ариѳметикѣ, и *школы абацистовъ,* которая не давала правилъ вычисленія, но изучала свойства чиселъ и отношеній. Великимъ учителемъ этой школы былъ Боэтій, первая же шла по слѣдамъ арабовъ. Школа альгористовъ процвѣтала въ Италіи (Пачіоли, Тарталья и друг.) и находила послѣдователей во всей Англіи и на континентѣ.

---

[1]) *Peacock,* pp. 437, 441, 442, 452.

[2]) *De Morgan,* Arith. Books, p. 27.

Но замѣчателенъ тотъ фактъ, что, хотя школа абацистовъ со своимъ педантизмомъ существовала еще на континентѣ, въ Англіи на нее не обращали почти никакого вниманія. Трудное изложеніе ариѳметическихъ отношеній съ его тяжелой фразеологіей не имѣло никакого практическаго значенія для англійскаго купца. Англійскій умъ невольно возмущался, когда его заставляли называть отношеніе $3:2 = 1\frac{1}{2}$ — *proportio superparticularis sesquialtera.*

Съ другой стороны, слѣдуетъ пожалѣть о томъ, что послѣдователи Тонсталля и Рекорда не держались высокихъ образцовъ, данныхъ этими двумя писателями-піонерами. Слѣдуетъ считать признакомъ рѣшительнаго упадка появленіе такой книги, какъ *Arithmetica Memorativa* Бёклея; въ этомъ латинскомъ трактатѣ правила ариѳметики выражены въ стихахъ, повидимому, съ цѣлью облегчить заучиваніе ихъ наизусть. Къ счастью, сочиненіе это никогда не было широко распространеннымъ. До изобрѣтенія книгопечатанія правила часто выражались въ стихахъ, но обычай *пользоваться ими* не былъ общераспространеннымъ, иначе и число печатныхъ ариѳметикъ такого рода было бы гораздо больше [1]). Во многихъ старыхъ ариѳметикахъ встрѣчаются иногда риѳмованныя правила, но очень немногія изъ этихъ книгъ написаны въ стихахъ. Немногимъ авторамъ приходила въ голову несчастная мысль писать подобно Бёклею или Соломону Lowe, правила ариѳметики англійскимъ гекзаметромъ и притомъ въ алфавитномъ порядкѣ.

Говоря объ ариѳметическихъ стихахъ, мы упомянемъ также объ одномъ раннемъ образчикѣ ариѳметической музы, встрѣчающейся впервые въ *Pathway of Knowledge* въ 1596 г.; эти стихи, наиболѣе классическіе въ своемъ родѣ, дошли и до нашего поколѣнія

„Thirtie daies hath September, Aprill, June, and November,
Februarie eight and twentie alone, all the rest thirtie and one“ *).

---

¹) *De Morgan.* Arith. Books, p. 16

*) Тридцать дней имѣетъ сентябрь, апрѣль, іюнь и ноябрь,
Двадцать восемь февраль одинъ, остальные тридцать одинъ.

Соперникомъ этихъ стиховъ по популярности является слѣдующая строфа [1]), цитируемая Дэвисомъ (Davies, „Key to Hutton's „Course") по рукописи 1570 г. или около этого времени:

„Multiplication is mie vexation
And Division is quite as bad,
The Golden Rule is mie stumbling stule
And Practice drives me mad" *).

Въ шестнадцатомъ столѣтіи встрѣчаются руководства по ариѳметикѣ, написанныя въ формѣ вопросовъ и отвѣтовъ. Въ семнадцатомъ столѣтіи такой обычай преобладалъ какъ въ Англіи, такъ и въ Германіи. Мы склоняемся къ мнѣнію Вильдермута, который полагаетъ, что эта форма руководствъ представляла прогрессъ по сравненію со старымъ обычаемъ просто давать учащемуся предписанія, указывая ему, какъ поступать въ различныхъ случаяхъ. Вопросъ привлекаетъ вниманіе ученика и приготовляетъ его умъ къ воспріятію новыхъ свѣдѣній. Къ сожалѣнію, эти вопросы всегда относятся къ тому, *какъ* что-нибудь дѣлается, въ нихъ никогда не спрашивается, *почему* слѣдуетъ поступать такъ, какъ указано. Печально наблюдать, какъ въ семнадцатомъ столѣтіи и въ Англіи и въ Германіи ариѳметика все болѣе и болѣе обращается въ простое собраніе правилъ. Въ шестнадцатомъ столѣтіи появилось нѣсколько руководствъ по ариѳметикѣ, написанныхъ выдающимися математиками, которые дѣлали попытки ввести въ свои книги доказательства. Затѣмъ слѣдовалъ періодъ, въ теченіе котораго ариѳметика изучалась исключительно для коммерческихъ цѣлей; этой школѣ коммерческой ариѳметики (около средины семнадцатаго столѣтія), говоритъ Де Морганъ [2]), „мы обязаны уничтоженіемъ доказательной ариѳметики въ нашей странѣ; по крайней мѣрѣ, школа эта воспрепятство-

---

[1]) *De Morgan.* Arith. Books.

*) Умноженіе — мое мученье и съ дѣленіемъ тоже бѣда, Золотое Правило — камень преткновенія, а Практика **) сводитъ меня съ ума.

**) т. е. Итальянская Практика — сложеніе кратныхъ частей; ср. стр. 24.

[2]) Arith. Books, p. 21.

вала развитію такой ариѳметики. У составителей ариѳметикъ никогда не было въ обычаѣ заботиться много о доказательствѣ своихъ правилъ; самое слово доказательство *(proof)* въ этой наукѣ никогда не означало больше, чѣмъ простую повѣрку правильности какого-нибудь опредѣленнаго дѣйствія посредствомъ обратнаго дѣйствія, выбрасыванія девятокъ или другихъ подобныхъ пріемовъ. Какъ только вниманіе было исключительно обращено на коммерческія цѣли ариѳметики, тѣ теоретическія разсужденія, которыя были унаслѣдованы отъ писателей шестнадцатаго столѣтія, стали понемногу исчезать; они уже окончательно отсутствуютъ въ ариѳметикѣ Коккера, авторомъ которой, какъ я полагаю, не безъ основанія слѣдуетъ считать Хоокинса [1]). Съ этого времени началось процвѣтаніе той совершенной школы преподавателей, ученики которыхъ спрашиваютъ, къ какому правилу относится предложенный имъ вопросъ, а, сдѣлавшись взрослыми, боятся всякихъ числовыхъ данныхъ, увѣряя, что цифрами можно доказать все, что угодно,— для нихъ-то пожалуй [2]). Вѣдь тѣ, кто не умѣютъ разсуждать о числахъ, дѣйствительно ни въ какомъ случаѣ не могутъ возражать противъ цифръ. Въ концѣ прошлаго *) столѣтія появился цѣлый рядъ сочиненій, слѣдовавшихъ одно за другимъ, авторы которыхъ жалуются на тотъ жалкій уровень, до котораго спустилась ариѳметика; всѣ они брались

---

[1]) „Коккерова Ариѳметика" была „просмотрѣна и издана" послѣ смерти Коккера Джономъ Хоокинсомъ (John Hawkins). Де Морганъ увѣряетъ, что сочиненіе это было написано вовсе не Коккеромъ, а самимъ Джономъ Хоокинсомъ, который приписалъ свою книгу Коккеру, чтобы легче продавать ее. Послѣ прочтенія статьи „Cocker" въ Dictionary of National Biography мы пришли къ тому убѣжденію, что Хоокинса можно считать невиновнымъ въ этомъ обманѣ. Внезапная смерть Коккера въ молодые годы достаточно объясняетъ тотъ фактъ, что большая часть его трудовъ появилась въ посмертныхъ изданіяхъ.

[2]) Въ Германіи стали изучать ариѳметику исключительно въ видѣ правилъ около средины шестнадцатаго столѣтія почти на сто лѣтъ раньше, чѣмъ въ Англіи. Но нѣмцы вернулись къ доказательной ариѳметикѣ въ восемнадцатомъ столѣтіи — раньше, чѣмъ англичане; см. *Unger,* pp. IV, 117 — 137.

*) т. е. восемнадцатаго.

за теоретическія объясненія правилъ ариѳметики и все-таки едва ли кому-нибудь изъ нихъ удалось опередить, хотя сколько-нибудь, своихъ предшественниковъ.

„Можно съ большимъ основаніемъ сомнѣваться въ томъ, что авторы старыхъ ариѳметическихъ руководствъ могли бы дать общія доказательства своихъ правилъ. Опытъ неоспоримо доказываетъ тотъ фактъ, что при начальномъ развитіи какой-нибудь отрасли науки элементарные принципы ея рѣдко прилагаются къ выводу наиболѣе естественныхъ ихъ слѣдствій безъ перехода къ такимъ сочетаніямъ, которыя являются послѣдующими или, по крайней мѣрѣ, должны были бы быть таковыми. Это является дѣломъ уже болѣе развитой мысли. Но старые ариѳметики и алгебраисты должны были бороться еще съ иного рода трудностями: они боялись своихъ собственныхъ на половину понятыхъ заключеній и это заставляло ихъ съ особенной осторожностью развивать свой, лишь на половину сформированный, языкъ".

Изъ ариѳметическихъ авторовъ, принадлежащихъ коммерческой школѣ, мы упомянемъ (кромѣ Коккера) о Джемсѣ Ходдерѣ (James Hodder), Томасѣ Дильвортѣ (Thomas Dilworth) и Даніэлѣ Феннингѣ (Daniel Fenning), потому что, какъ мы увидимъ позже, сочиненія ихъ были въ употребленіи въ американскихъ колоніяхъ.

James Hodder[1]) былъ въ 1661 г. учителемъ чистописанія въ Lothbury, въ Лондонѣ. Онъ былъ сначала извѣстенъ какъ авторъ Ходдеровой *Ариѳметики,* популярнаго учебника, послужившаго основой для болѣе извѣстнаго сочиненія Коккера. Главное усовершенствованіе, внесенное въ ариѳметику Коккеромъ, состояло въ новомъ способѣ дѣленія „посредствомъ придачи" (какъ называли его итальянцы) — способѣ, введенномъ имъ вмѣсто способа „помарокъ", или „галеры", изложеннаго у Ходдера. Первое изданіе Ходдеровой книги появилось въ 1661 г., двадцатое въ 1739 г. Ходдеръ написалъ также *Развлеченія чистописца (The Penman's Recreation;* въ этой книгѣ образчики письма выграви-

---

[1]) Dictionary of National Biography.

рованы Коккеромъ, съ которымъ, повидимому, Ходдеръ былъ въ дружескихъ отношеніяхъ) и *Десятичную Ариѳметику (Decimal Arithmetick)*, напечатанную въ 1668 г.

Коккерова *Ариѳметика* выдержала, по крайней мѣрѣ, 112 изданій [1]), считая въ томъ числѣ шотландскія и ирландскія изданія [2]). Какъ François Barrême во Франціи и Adam Riese въ Германіи, Коккеръ пользовался въ Англіи почти въ теченіе столѣтія славой, вошедшей въ пословицу; имена Баррема, Ризе и Коккера сдѣлались синонимами науки о числахъ. Человѣкъ, который имѣлъ такое большое вліяніе на преподаваніе математики, заслуживаетъ того, чтобы сказать о немъ нѣсколько словъ. Эдуардъ Коккеръ (1631 — 1675) былъ экспертомъ искусства чистописанія, ариѳметики и гравированія. Въ 1657 году онъ жилъ „по южную сторону Церкви св. Павла“ *), гдѣ занимался преподаваніемъ чистописанія и ариѳметики „по необыкновенному способу“ **). Въ 1664 году онъ объявилъ, что откроетъ общественную школу около Св. Павла для обученія чистописанію и ариѳметикѣ и будетъ принимать въ нее пансіонеровъ. Позднѣе онъ поселился въ Нортгамптонѣ [3]). Если не считать полнаго

---

[1]) Dictionary of National Biography.

[2]) Исправленныя изданія Коккеровой Ариѳметики появились въ 1725, 1731, 1736, 1738, 1745, 1758, 1767 г.г.; они принадлежатъ „Джоржу Фишеру“ (George Fisher) — это псевдонимъ *Mrs. Slack*. Подъ тѣмъ же псевдонимомъ она издала въ Лондонѣ въ 1763 г. книгу подъ заглавіемъ: „The Instructor: or Young Man's best Companion, containing spelling, reading, writing, and arithmetic, etc. (учитель: или лучшій товарищъ молодого человѣка, содержащій умѣніе складывать слова, чтеніе, письмо, ариѳметику и т. д.). Четырнадцатое изданіе этой книги появилось въ 1785 г. Worcester, Mass., (двадцать восьмое въ 1798 г.) подъ заглавіемъ The American Instructor и т. д. какъ выше. Въ Филадельфіи эта книга была напечатана въ 1748 и 1801 г.г. Насколько намъ извѣстно Mrs. Slack — первая женщина, написавшая руководство по ариѳметикѣ. См. Bibliotheca Mathematica, 1895, p. 75; Teach. and Hist. of Mathematics in the U. S., 1890, p. 12.

*) „on the south side of St. Paul's Churchyard“.

**) „in an extraordinary manner“.

[3]) *Pepys* упоминаетъ о немъ нѣсколько разъ въ 1664 году въ своемъ *Дневникѣ*, — 10-ое: „искалъ кого-нибудь, кто могъ бы выгравировать мою таблицу на моей выдвижной линейкѣ съ

отсутствія какихъ-либо доказательствъ, то можно сказать, что Коккерова *Ариѳметика* была хорошо написана; она къ тому же удовлетворяла, повидимому, потребностямъ тѣхъ временъ. Коккеръ былъ весьма плодовитымъ писателемъ; онъ написалъ 33 сочиненія: 23 по каллиграфіи, 6 по ариѳметикѣ и 4 смѣшаннаго содержанія. Ариѳметика излагается въ слѣдующихъ сочиненіяхъ: *Tutor to Arithmetick* (Наставникъ по ариѳметикѣ — 1664 г.); *Compleat Arithmetician* (Полное руководство по ариѳметикѣ — 1669 г.); *Arithmetick* (1678; Пикокъ на страницѣ 454 даетъ 1677 г.); *Decimal Arithmetick* (Десятичная ариѳметика); *Artificial Arithmetick* (Искусственная ариѳметика, гдѣ говорится о логариѳмахъ); *Algebraical Arithmetick* (трактующая объ уравненіяхъ) въ трехъ частяхъ, 1684, 1685, „просмотрѣнныхъ и изданныхъ“ Джономъ Хоокинсомъ.

Въ англійскихъ, равно какъ во французскихъ и нѣмецкихъ ариѳметикахъ, появившихся въ теченіе шестнадцатаго, семнадцатаго и восемнадцатаго столѣтій, „тройное правило“ занимаетъ центральное положеніе. Бэкеръ говоритъ [1]) въ своемъ сочиненіи *Well-Spring of the Sciences,* 1562: „Тройное правило — главное, наиболѣе полезное и наиболѣе превосходное правило во всей ариѳметикѣ. Ибо всѣ другія правила нуждаются въ немъ, оно же обходится безъ всѣхъ другихъ; по этой причинѣ, какъ говорятъ, и назвали его философы золотымъ правиломъ; теперь же, въ эти послѣдніе

серебряными пластинками; она настолько мала, что Браунъ, сдѣлавшій ее, не нашелъ никого, кто могъ бы выполнить эту работу, поэтому я заказалъ ее Коккеру, знаменитому учителю чистописанія, и цѣлый часъ смотрѣлъ, какъ онъ рисовалъ все это; очень странно было смотрѣть, какъ онъ потомъ сразу же и безъ помощи очковъ вырѣзалъ это такъ мелко, что никогда въ жизни при всемъ моемъ стараніи я не могъ прочесть ни одного слова или буквы, между тѣмъ какъ онъ прочелъ все написанное безъ всякаго пропуска . . . . По разговору этого человѣка видно, что онъ очень изобрѣтателенъ и остроуменъ; между прочимъ онъ большой почитатель и хорошій знатокъ англійскихъ поэтовъ и охотно говоритъ о всѣхъ нихъ и безъ неумѣстнаго самомнѣнія“. Коккеръ писалъ оригинальныя поэмы и двустишія, указывающія на нѣкоторыя поэтическія способности.

[1]) *Peacock,* p. 452.

дни, мы называемъ его тройнымъ правиломъ, такъ какъ для примѣненія его нужны три числа“ *). Обозначенія, относящіяся къ этому правилу, встрѣчаемыя у разныхъ писателей, значительно разнятся другъ отъ друга. Пикокъ (p. 452) приводитъ для примѣра слѣдующую задачу: „Если 2 яблока стоятъ 3 сольди, то сколько стоятъ 13 яблокъ?“ Въ обозначеніи Тартальи эта задача представляется такъ:

Se pomi 2 ‖ val soldi 3 ‖ che valera pomi 13.

Рекордъ и старые англійскіе ариѳметики пишутъ такъ:

Яблоки.	Пенни.
2 —	3
13	$19\frac{1}{2}$ отвѣтъ.

Въ семнадцатомъ столѣтіи существовалъ обычай писать слѣдующимъ образомъ (Wingate, Cocker, etc.):

Яблоки.	Пенни.	Яблоки.
2 —	3 —	13

Обозначенія, относящіяся къ задачамъ на тройное правило обратили на себя особое вниманіе Оутреда, который ввелъ знакъ : : и сталъ писать

2 . 3 : : 13.

М. Канторъ [1]) говоритъ, что точка, выражающая здѣсь отношеніе, впослѣдствіи была замѣнена двумя точками, такъ какъ въ восемнадцатомъ столѣтіи подъ вліяніемъ нѣмецкаго писателя Христіана Вольфа окончательно укрѣпился обычай пользоваться точкой, какъ знакомъ умноженія. Въ Англіи для замѣны точки двоеточіемъ была другая причина. Слѣдуетъ припомнить, что Оутредъ не пользовался десятичной

---

*) „The rule of three is the chiefest, and the most profitable, and most excellent rule of all arithmeticke. For all other rules have neede of it, and it passeth all other; for the which cause, it is sayde the philosophers did name it the Golden Rule, but now, in these later days, it is called by us the Rule of Three, because it requireth three numbers in the operation“.

[1]) *Cantor,* II, p. 658.

точкой. Она вошла во всеобщее употребленіе въ Англіи лишь въ первой четверти восемнадцатаго столѣтія, и мы совершенно увѣрены въ томъ, что именно десятичная точка, а не Вольфовъ знакъ умноженія вытѣснилъ Оутредовъ символъ для отношеній. Такъ какъ нѣмцы употребляютъ вмѣсто нашей точки десятичную *запятую* [1]), то причина упомянутой перемѣны и не могла быть одна и та же въ Германіи и Англіи. Дильвортъ [2]) не пользуется точкой при умноженіи, но употребляетъ десятичную точку, а пропорціи пишетъ [3]) на одной страницѣ такъ 2..4::8..16, а на другой— 3:17::48. До настоящаго*) столѣтія англійскіе авторы рѣдко пользовались точкой для обозначенія умноженія. Если бы Оутредъ имѣлъ обыкновеніе разсматривать пропорцію, какъ

---

[1]) Нѣмцы приписываютъ введеніе десятичной *запятой* Кеплеру (см. *Unger,* p. 104; *Gerhardt,* pp. 78, 109; *Günther,* Vermischte Untersuchungen, p. 133). Онъ пользуется ею въ книгѣ, напечатанной въ 1616 г. Неперъ въ своемъ сочиненіи Rabdologia (1617) говоритъ о „прибавленіи періода или запятой" и пишетъ 1993,273 (см. Construction, *Macdonald's* Ed., p. 89). Англійскіе авторы не ограничивались употребленіемъ только десятичной *точки,* они пользовались часто и запятой; см., напр., Martin's Decimal Arithmetick (1763) и Newton's Universal Arithmetick, Wilder's Ed., London 1769, гдѣ употребляется исключительно запятая. Въ сочиненіи Уингэта въ изданіи Кэрси (1735) и у Дильворта (1784) мы читаемъ о „точкѣ или запятой", но на самомъ дѣлѣ тамъ употребляется только точка. Въ Додсоновомъ изданіи Уингета (1760) употребляются оба знака; точка, пожалуй, чаще, чѣмъ запятая. Коккеръ (1714) и Хаттонъ (1721) даже и не упоминаютъ о запятой.

[2]) *Thomas Dilworth,* Schoolmaster's Assistant, 22d Ed., London, 1784, на страницѣ, слѣдующей за оглавленіемъ; также pp. 45, 123. Самое раннее свидѣтельство относится къ 1743 г.

[3]) Въ его время пользовались какъ новыми, такъ и старыми обозначеніями, что видно изъ слѣдующихъ его словъ: „Нѣкоторые преподаватели вмѣсто точекъ употребляютъ длинныя черты для отдѣленія членовъ, но такъ поступать не слѣдуетъ; ибо двѣ точки между первымъ и вторымъ членами и между третьимъ и четвертымъ членами показываютъ, что два первыхъ и два послѣднихъ члена находятся въ одной и той же пропорціи. Съ другой стороны, четыре точки, поставленныя между вторымъ и третьимъ членами, служатъ для того, чтобы разъединить ихъ и показать, что второй и третій и первый и четвертый члены не находятся въ той же самой прямой пропорціи другъ къ другу, въ какой находятся раньше упомянутые члены".

*) т. е. девятнадцатаго.

равенство двухъ отношенiй, то онъ, вѣроятно, выбралъ бы знакъ = вмѣсто : :. Лейбницъ[1]), дѣйствительно, пользовался первымъ изъ этихъ знаковъ для этой цѣли. Обозначенiе 2:4=1:2 вошло въ употребленiе въ Соединенныхъ Штатахъ и въ Англiи въ первой четверти девятнадцатаго столѣтiя, когда нацiи, говорящiя по-англiйски, стали изучать Эйлерову алгебру и французскiя руководства.

Тройное правило господствовало въ коммерческой ариѳметикѣ въ Германiи до конца восемнадцатаго столѣтiя, а въ Англiи и Америкѣ до конца первой четверти настоящаго столѣтiя [2]). Съ тѣхъ поръ оно находилось въ большомъ употребленiи. Важную роль играло въ коммерческихъ кругахъ родственное съ нимъ правило, называемое по-англiйски *chain-rule* (цѣпное правило) или *conjoined proportion* (сложная пропорцiя), по-французски *règle conjointe,* по-нѣмецки *Kettensatz* или *Reesischer Satz* [3]). Наиболѣе совершенное формальное развитiе и наибольшее распространенiе получило это правило въ Германiи и Нидерландахъ. Kelly [4]) приписываетъ превосходство иностранныхъ купцовъ въ биржевой наукѣ болѣе близкому знакомству ихъ съ этимъ правиломъ. Въ своихъ существенныхъ чертахъ цѣпное правило было извѣстно еще индусу Брахмагуптѣ, а также итальянцамъ Леонардо изъ Пизы, Пачiоли, Тарталья; ста-

---

[1]) *Wildermuth.*

[2]) *Unger* (p. 170) говоритъ, что въ Германiи предпочитали пользоваться тройнымъ правиломъ, какъ общимъ правиломъ для рѣшенiя задачъ въ шестнадцатомъ столѣтiи; въ семнадцатомъ столѣтiи предпочитали методъ, называемый Практикой, въ восемнадцатомъ—цѣпное правило, а въ девятнадцатомъ – Анализъ (Bruchsatz или Schlussrechnung). Въ Англiи мы не замѣчаемъ подобныхъ перемѣнъ. Тамъ тройное правило занимало господствующее положенiе до настоящаго столѣтiя, правила простого и двойного положенiя употреблялись во время Рекорда больше, чѣмъ впослѣдствiи; цѣпное правило никогда не было широко распространено; на Практику же всегда обращали нѣкоторое вниманiе.

[3]) Авторъ помнитъ, какъ его обучали правилу „Kettensatz“ въ 1873 г. въ Kantonschule въ Хурѣ, въ Швейцарiи; вмѣстѣ съ тѣмъ преподавались три другiе метода: „Einheitsmethode“ (Schlussrechnung), „Zerlegungsmethode“ (видъ итальянской практики) и „Proportion“.

[4]) Vol. II, p. 3.

рымъ нѣмецкимъ авторамъ Іоганну Видману и Адаму Ризэ. Въ Англіи это правило было разработано Джономъ Керси (John Kersey) въ его изданіи Уингэтовой ариѳметики, напечатанномъ въ 1668 году. Но наиболѣе способствовалъ его распространенію Kaspar Franz von Rees (род. въ 1690 г.) изъ Roermonde въ Лимбургѣ, который переселился затѣмъ въ Голландію. Тамъ онъ написалъ по-голландски ариѳметику, появившуюся во французскомъ переводѣ въ 1737 г., а въ нѣмецкомъ переводѣ въ 1739 г. Въ Германіи *Reesischer Satz* сталъ знаменитъ. Коккеръ (28 изд., Dublin, 1714, p. 232) иллюстрируетъ это правило на слѣдующемъ примѣрѣ: „если 40 l. *Auverdupois* въ *Лондонѣ* равны 36 l. въ *Амстердамѣ,* а 90 l. въ *Амстердамѣ* составляютъ 116 l. въ *Данцигѣ,* то сколько *Данцигскихъ* фунтовъ равны 112 l. *Auverdupois* въ *Лондонѣ?*".

(p. 234) „Расположивъ члены по 7-му изъ предшествующихъ правилъ, получимъ:

	A	B	
l. *at Lond.*	40	36	l. *at Amsterdam*
l. *at Amst.*	90	116	l. *at Dantzick*
		112	l. *ai London*

Съ помощью этой таблицы я получаю дѣлимое 467712, перемножая члены, написанные подъ B, а перемножая члены подъ A, именно 40 и 90, получаю дѣлителя 3600; произведя дѣленіе, получимъ въ частномъ $129\frac{3312}{4500}$, что показываетъ число *Данцигскихъ* фунтовъ".

Цѣпное правило обязано своей извѣстностью тому обстоятельству, что правильный отвѣтъ могъ быть найденъ безъ всякаго напряженія ума. Реесъ обратилъ это правило въ простой механизмъ. Будучи полезнымъ для купца, правило это не имѣетъ никакого значенія при обученіи для развитія ума. Авторы нѣкоторыхъ ариѳметикъ дѣлали попытки дать выводъ этого правила съ помощью пропорцій или обыкновеннаго анализа. Но для педагогической цѣли попытки эти оказались неудовлетворительными. Существуетъ другое правило, при примѣненіи котораго легче впасть въ

ошибку, но которое требуетъ нѣкотораго разсужденія; оно стало извѣстно въ Германіи, какъ „Basedowsche Regel“; оно было рекомендовано педагогомъ-реформаторомъ Базедовымъ, хотя было извѣстно и раньше. Въ началѣ настоящаго столѣтія въ преподаваніи ариѳметики въ Германіи произошелъ переворотъ. *Цѣпное правило* и *тройное правило* были постепенно отодвинуты на задній планъ, и сталъ все болѣе и болѣе выдвигаться впередъ способъ послѣдовательныхъ заключеній —„Schlussrechnung“, хотя Песталоцци и питалъ пристрастіе къ употребленію пропорцій. „Schlussrechnung“ иногда обозначается по-англійски словомъ Analysis — анализъ. Если 3 ярда стоятъ $7 *), то сколько будутъ стоить 19 ярдовъ? Одинъ ярдъ будетъ стоить $$\frac{7}{3}$, а 19 ярдовъ $\frac{7\times 19}{3}$ = $44.33; та же задача можетъ быть рѣшена по способу, представляющему нѣкоторое измѣненіе предыдущаго, по способу „кратныхъ частей (aliquot parts)“: 18 ярдовъ будутъ стоить $42; одинъ ярдъ $2.33, а 19 ярдовъ $44.33. Способъ „Schlussrechnung“ былъ извѣстенъ Тартальѣ, но онъ, безъ сомнѣнія, гораздо древнѣе; вѣдь это совершенно естественный методъ, который самъ пришелъ бы въ голову всякому человѣку со здравымъ и сильнымъ умомъ. Его педагогическое значеніе заключается въ томъ, что въ немъ нѣтъ ничего механическаго, что онъ не требуетъ заучиванія наизусть какихъ-либо формулъ и дѣлаетъ изученіе ариѳметики упражненіемъ въ разсужденіи. Право, очень странно, что въ новыя времена авторы ариѳметикъ въ теченіе цѣлыхъ трехъ столѣтій относились пренебрежительно къ такому методу.

Англійскія ариѳметики обнимали всѣ коммерческіе предметы, излагавшіеся прежде итальянцами, какъ, напримѣръ, простые и сложные проценты, прямое тройное правило, обратное тройное правило (названное Рекордомъ попятнымъ тройнымъ правиломъ —„backer rule of three“), убытки и прибыли, промѣнъ, уравненіе платежей, векселя, смѣшеніе, срочныя уплаты, правила простого и двойного положенія и

*) 7 долларовъ.

ученіе о тарѣ, треттѣ и клоффѣ (tare, trett, cloff). Дильвортъ (p. 37, 1784) такъ объясняетъ значеніе послѣднихъ трехъ терминовъ.

„*В.* Какія скидки обыкновенно дѣлаютъ покупателю на большомъ вѣсѣ Averdupois?

О. Это Tare, Trett и Cloff.

В. Что такое Тара?

О. Это скидка, которая дѣлается покупателю на вѣсъ ящика, мѣшка, сосуда или какого-нибудь иного предмета, заключающаго въ въ себѣ покупаемый товаръ. . . .

В. Что такое Третта?

О. Третта есть скидка въ 4 фунта на 104 фунта, т. е. въ одну двадцать шестую часть, которую дѣлаетъ купецъ покупателю нѣкоторыхъ сортовъ товаровъ на разсыпку или мусоръ. . . .

В. Что такое Клоффъ?

О. Клоффъ есть скидка въ 2 фунта на каждое количество товара больше, чѣмъ въ 3 С вѣсомъ, получаемая гражданами Лондона на нѣкоторыхъ сортахъ товара, какъ: чернильный орѣхъ, марена, сумахъ (кожевенное дерево), винный камень и т. д.

В. Какъ называются эти скидки за моремъ?

О. Ихъ называютъ *Courtesies of London* (Лондонскія милости), потому что ихъ нѣтъ ни въ какомъ другомъ мѣстѣ [1]).

Ко всѣмъ этимъ предметамъ, заимствованнымъ у итальянцевъ, англичане прибавили мѣры и вѣса, какъ свои собственные, такъ и принадлежащіе тѣмъ странамъ, съ которыми Англія вела торговлю. Въ семнадцатомъ столѣтіи къ этимъ предметамъ прибавились еще десятичныя дроби, и книги того времени излагали ихъ съ бóльшимъ стараніемъ, чѣмъ то дѣлалось вѣкъ спустя. Удивительно то, что нѣкоторыя ариѳметики посвящали значительную долю вниманія логариѳмамъ. Коккеръ написалъ книгу объ „Искусственной Ариѳметикѣ". Мы видѣли правила употребленія логариѳмовъ вмѣстѣ съ логариѳмическими таблицами чиселъ въ ариѳметикахъ Джона Хилля (John Hill — 10-ое изд. Э. Хаттона, Лондонъ, 1761), Бенджамина Мартина (Benjamin Martin, *Decimal Arithmetick,* London, 1763; говорятъ, что эта книга

---

[1]) Терминъ „cloff" имѣетъ также болѣе общее значеніе; онъ означаетъ небольшую скидку, дѣлаемую при оптовой продажѣ товара, чтобы возмѣстить потерю вѣса при розничной продажѣ. *Peacock,* p. 455.

была впервые издана въ 1735 г.), Эдуарда Хаттона (Edward Hatton, *Intire System of Arithmetic,* London, 1721 — Полная система ариѳметики) и въ изданіяхъ Эдмунда Уингэта. Уингэтъ (Wingate) былъ лондонскій адвокатъ, занимавшійся математикой для препровожденія времени. Проведя нѣсколько лѣтъ въ Парижѣ, онъ опубликовалъ тамъ въ 1625 г.[1]) свое сочиненіе *Arithmétique logarithmique,* появившееся въ Лондонѣ въ англійскомъ переводѣ въ 1635 г.[2]). Уингэтъ первый ввелъ во Франціи Бригговы логариѳмы (заимствованные изъ Гёнтеровыхъ таблицъ). Около 1629 г. онъ издалъ свою ариѳметику *(Arithmetick),* „въ которой главной его цѣлью было пойти навстрѣчу трудностямъ, обыкновенно встрѣчающимся при употребленіи логариѳмовъ: для достиженія этой цѣли онъ раздѣлилъ свое сочиненіе на двѣ книги, первую назвалъ онъ *Естественной* (Natural), вторую *Искусственной Ариѳметикой* (Artificial Arithmetic)“ [3]). Позднѣйшія изданія Уингэта опирались на первую изъ этихъ книгъ; они принадлежали Джону Керси, затѣмъ Джоржу Шелли (Shelley) и, наконецъ, Джемсу Додсону. Книга эта подверглась при этомъ такому измѣненію, что Уингэтъ не узналъ бы ее.

Интересно наблюдать, какъ иногда авторы вводили въ *практическую* ариѳметику такіе предметы, которые имѣли исключительно теоретическое значеніе. Вѣроятно, авторы эти полагали, что теоретическіе вопросы, заинтересовавшіе ихъ самихъ и разработанные ими, должны были также возбуждать любопытство и у ихъ читателей. Къ такимъ предметамъ принадлежатъ квадратные и кубическіе корни, корни высшихъ степеней, непрерывныя дроби, періодическія и десятичныя дроби и таблицы степеней 2 до 144-ой. Эти послѣднія были „очень полезны для того, чтобы складывать

---

[1]) *De Morgan.* Arith. Books; *Maximilien Marie,* Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques, Vol. III, p. 225, даетъ 1626 годъ, вмѣсто 1625.

[2]) *Marie,* Vol. III, p. 225.

[3]) Предисловіе *Джемса Додсона* къ *Уингэтовой* Ариѳметикѣ, Лондонъ, 1760. Терминъ „искусственныя числа“ для обозначенія логариѳмовъ принадлежитъ самому Неперу.

зерна на квадратахъ шахматной доски, разорять людей на продажѣ подковъ и рѣшать столь же похвальныя задачи" (Де Морганъ). Вопросъ о періодическихъ десятичныхъ дробяхъ впервые разработали Джонъ Валлисъ (John Wallis, *Algebra,* Ch. 89), Леонардъ Эйлеръ (L. Euler, *Algebra,* книга I, гл. 12) и Иванъ Бернулли. Періодическія дроби одно время „обременяли руководства по практической ариѳметикѣ, которымъ было до нихъ не больше дѣла, чѣмъ книгамъ по измѣренію до полной квадратуры круга" [1]). Книга *Decimal Arithmetic,* изданная въ 1742 г. и принадлежащая Джону Маршу (John Marsh) посвящена почти исключительно этому предмету. Какъ о своихъ предшественникахъ, онъ упоминаетъ о Валлисѣ, Джонсѣ (Jones — 1706), Уардѣ (Ward), Браунѣ (Brown), Малькольмѣ (Malcolm), Кённѣ (Cunn), Райтѣ (Wright).

Послѣ большого Лондонскаго пожара въ 1666 году вопросъ о страхованіи отъ огня началъ принимать практическія формы, и въ 1681 году была открыта въ Лондонѣ первая правильная контора страхованія отъ огня. Первая контора такого рода въ Шотландіи была учреждена въ 1720 г., въ Германіи въ 1750 г.; первая страховая контора въ Соединенныхъ Штатахъ была открыта въ Филадельфіи въ 1752 г. — однимъ изъ ея директоровъ былъ Веньяминъ Франклинъ [2]). Съ теченіемъ времени на вопросъ о страхованіи отъ огня стали обращать нѣкоторое вниманіе и англійскія руководства по ариѳметикѣ. Въ 1734 году было введено впервые страхованіе жизни, похожее на современное, но всѣ члены страховались одинаково, независимо отъ возраста. Лишь въ 1807 году мы встрѣчаемся впервые съ примѣромъ страхованія по оцѣнкѣ, „сообразной съ возрастомъ и другими обстоятельствами".

Интересно замѣтить, что до средины восемнадцатаго столѣтія въ Англіи былъ обычай начинать законный годъ съ 25-го марта. Только съ 1752 года стали считать начало

---

[1]) *De Morgan.* Arith. Books, p. 69.

[2]) Статья „Insurance" (Страхованіе) въ Encyclopaedia Britannica, 9 th Ed.

новаго года съ перваго января и по григоріанскому календарю [1]). Въ 1752 году между 2-мъ и 14-мъ сентября было пропущено одиннадцать дней; такимъ образомъ, совершился переходъ отъ „стараго стиля“ къ „новому стилю“.

Порядокъ, въ которомъ трактовались въ старыхъ ариѳметикахъ различные предметы, не имѣлъ никакихъ логическихъ основаній. Опредѣленія часто собраны вмѣстѣ и помѣщены въ началѣ книги. Дильвортъ излагаетъ правила для случая „цѣлыхъ чиселъ“, затѣмъ излагаетъ тѣ же правила для „обыкновенныхъ дробей“ и снова излагаетъ ихъ для „десятичныхъ дробей“. Такъ, онъ даетъ „тройное правило“, затѣмъ, „тройное правило въ дробяхъ“ и, наконецъ, „прямое тройное правило въ десятичныхъ дробяхъ“. Джонъ Хилль въ своей ариѳметикѣ (изданіе 1761 г.) прибавляетъ къ этому еще „золотое правило въ логариѳмахъ“. Дроби излагаются обыкновенно къ концу книги. Очевидно, многіе ученики не надѣялись когда-либо дойти до дробей, и въ ихъ интересахъ первыя части руководствъ по ариѳметикѣ обнимали всѣ коммерческія правила. Въ восемнадцатомъ столѣтіи обычай откладывать изложеніе дробей до конца руководства сталъ еще болѣе преобладающимъ [2]). Сверхъ того, изло-

---

[1]) *E. Stone* въ своемъ новомъ математическомъ Словарѣ (New Mathematical Dictionary, London, 1743), говоритъ о различныхъ перемѣнахъ въ календарѣ въ прежнія времена и затѣмъ прибавляетъ: „Папа Григорій XIII претендовалъ на новую реформу календаря и повелѣлъ, чтобы его расчетъ былъ принятъ всѣми, что еще до сихъ поръ соблюдается въ римско-католическихъ странахъ“. Безъ сомнѣнія, слово „претендовалъ“ скрываетъ за собою большое предубѣжденіе противъ григоріанской реформы, а относящееся къ ней выраженіе „до сихъ поръ“ вызываетъ въ наше время улыбку.

[2]) *Джонъ Керси* въ 16-мъ изданіи *Уингэтовой* ариѳметики (Лондонъ, 1735) говоритъ въ своемъ предисловіи: „Для удобства и въ интересахъ тѣхъ учащихся, которые хотятъ ознакомиться съ *ариѳметикой* лишь настолько, насколько она полезна при денежныхъ расчетахъ, для торговли и другихъ подобныхъ приложеній, ученіе о числахъ (изложеніе котораго въ первомъ изданіи было перемѣшано съ опредѣленіями и правилами, относящимися къ дробнымъ числамъ, обыкновенно называемымъ дробями [Broken Numbers, commonly called Fractions]) теперь излагается совершенно отдѣльно. . . . , такъ что теперь дается простое и полное изложеніе *ариѳметики* цѣлыхъ чиселъ

женіе этого предмета было обыкновенно очень плохимъ. Хотя лучшія руководства по ариѳметикѣ, напримѣръ, Уингэтъ, и показываютъ, какъ находить общаго наименьшаго знаменателя при сложеніи дробей, въ большинствѣ книгъ за общаго знаменателя принимается произведеніе данныхъ знаменателей. Такъ, Коккеръ считаетъ общимъ знаменателемъ $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{12}{20}$ число 8000, Дильвортъ даетъ $\frac{1}{2}+\frac{7}{8}=1\frac{6}{16}$; Хаттонъ даетъ $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}=\frac{92}{96}=\frac{23}{24}$.

Во всѣхъ руководствахъ тройное правило излагалось подъ двумя различными заглавіями —„Прямое Тройное Правило“ (Rule of Three Direct) и „Обратное Тройное Правило“ (Rule of Three Inverse). Первое изъ этихъ правилъ относится къ задачамъ такого рода: „Если 4 студента тратятъ 19 фунтовъ, то сколько фунтовъ истратятъ 8 студентовъ при тѣхъ же издержкахъ?“ *(Wingate)*. Обратное правило рѣшаетъ задачи такого рода: „Если 8 лошадей можно прокормить въ теченіе 12 дней извѣстнымъ количествомъ фуража, то на сколько дней хватитъ того же количества для прокормленія 16 лошадей?“ *(Wingate)*. При рѣшеніи задачъ, подобной первой изъ приведенныхъ, правильный отвѣтъ можно было бы получить, принимая три числа, данныя въ задачѣ, въ томъ порядкѣ, какъ они даны, за три первые члена пропорціи. Въ обозначеніяхъ Уингэта мы получили бы: Если $\overset{\text{Студентовъ}}{4}\quad\overset{\text{Фунтовъ}}{19}\quad\overset{\text{Студентовъ}}{8}.$ Но во второмъ примѣрѣ „нельзя сказать (какъ прежде въ прямомъ тройномъ правилѣ), что какъ 8 относится къ 16, такъ 12 къ другому числу, которое должно было бы быть въ этомъ случаѣ вдвое больше 12; но, наоборотъ, нужно взять *обратное отношеніе* (inverted Proportion), начиная съ послѣдняго члена; какъ 16 относится къ 8, такъ 12 къ другому числу“ (*Wingate*, 1735, p. 57). Это указаніе хорошо объясняетъ смыслъ названія „*обратное* тройное правило“. Такъ какъ всѣ задачи, относящіяся къ тройному правилу, распредѣлялись авторами руководствъ на двѣ различныхъ группы —

раньше, чѣмъ приступить къ крутымъ путямъ дробей, при видѣ которыхъ нѣкоторые учащіеся приходятъ въ такое уныніе, что останавливаются и восклицаютъ: *non plus ultra*, дальше мы не пойдемъ“.

задачи на прямое правило и задачи на обратное правило, то ученикъ могъ получать правильные отвѣты совершенно механически, не заботясь о томъ, къ какому правилу относится задача? Такимъ образомъ, та сторона этого предмета, которая требуетъ больше всего искусства отъ современнаго учителя, преподающаго пропорціи, въ прежнія времена не представляла никакого затрудненія. На дисциплину ума не обращали ни малѣйшаго вниманія. Равнымъ образомъ авторамъ не было никакого дѣла до того, какъ ученикъ будетъ рѣшать задачу, если ему не скажутъ заранѣе, къ какому правилу она относится.

Начиная со времени Коккера, всѣ доказательства старательно опускались. Единственные доводы, извѣстные Дильворту, это повѣрка въ такомъ родѣ: „Умноженіе и дѣленіе повѣряютъ другъ друга". Единственное свидѣтельство о томъ, что Джонъ Хилль зналъ о существованіи такой вещи, какъ математическое доказательство, мы нашли въ слѣдующихъ словахъ этого автора: „Такимъ образомъ, $\frac{1}{2}$, умноженная на $\frac{1}{2}$, составляетъ $\frac{1}{4}$. Смотри доказательство этого въ книгѣ м-ра Лейбёрна—Cursus Mathematicus, стр. 38". Какой контрастъ представляетъ это съ нашей цитатой о дробяхъ изъ Тонсталля. Обычай ссылаться на другія сочиненія встрѣчается въ руководствахъ по ариѳметикѣ того времени чаще, чѣмъ въ современныхъ. Коккеръ ссылается на *Appendix* Керси, на *Ариѳметику* Уингэта, на *Тригонометрію* Питискуса и на *Clavis* Оутреда, говоря о доказательствѣ правила двойного положенія. Коккеръ нѣсколько разъ даетъ подстрочныя латинскія примѣчанія изъ *Clavis,* изъ *Математики* Альстеда и изъ *Methodus Facilis* Геммы-Фризія (Виттенбергъ, 1548).

Въ концѣ восемнадцатаго столѣтія въ лучшихъ руководствахъ начинаютъ появляться доказательства, но они часто помѣщаются внизу страницы и отдѣляются горизонтальной чертой отъ правилъ и примѣровъ, написанныхъ вверху. Такое расположеніе успокаивало совѣсть автора, а учителя и ученика, не дорожившихъ доказательствами, присутствіе ихъ тамъ менѣе безпокоило; при такомъ расположеніи легко было пропустить ихъ. Сверхъ того, дока-

зательства и объясненія не были приспособлены для начинающихъ, и не было ни малѣйшихъ слѣдовъ нагляднаго обученія; изложеніе было слишкомъ отвлеченнымъ. Настоящая реформа, какъ въ Англіи, такъ и въ Америкѣ, началась только послѣ введенія идей Песталоцци.

До настоящаго*) столѣтія въ Англіи не обращали никакого вниманія на вычисленія въ умѣ; въ Германіи же умственная ариѳметика была введена во второй половинѣ восемнадцатаго вѣка [1]).

Причины, задерживавшія развитіе теоретической ариѳметики въ Англіи.

До реформаціи для народнаго образованія въ Англіи было сдѣлано очень мало, почти ничего. Нѣкоторое образованіе англійскіе юноши получали у монаховъ въ монастыряхъ, но тамъ, повидимому, не преподавали имъ ни одного изъ отдѣловъ математики [2]). Въ 1393 году была учреждена знаменитая „общественная школа“ (public school) — *Winchester,* а въ 1440 году—*Eton.* Въ шестнадцатомъ столѣтіи, послѣ упраздненія монастырей, было основано значительное число школъ — *The Merchant Taylor's School, Christ Hospital, Rugby, Harrow* и другія, пользующіяся въ Англіи исключительнымъ правомъ называться общественными школами; въ теченіе нѣсколькихъ столѣтій въ школахъ этихъ воспитывались, главнымъ образомъ, сыновья знатныхъ людей и мелкихъ дворянъ [3]). Въ этихъ школахъ почти исключительнымъ предметомъ обученія служили древніе классики; изученіе математики тамъ отсутствовало. Можетъ быть, потреб-

*) т. е. девятнадцатаго.

[1]) *Unger,* p. 168.

[2]) Нѣкоторое понятіе о состояніи ариѳметическихъ знаній можетъ дать древній обычай въ Шрусбёри, по которому только тотъ считался совершеннолѣтнимъ, кто уже умѣлъ считать до двѣнадцати пенни. (Year-Books Edw. I [Ежегодники Эдуарда I], XX.—I Ed. *Horwood,* p. 220). См. *Tylor's* Primitive Culture, New York, 1889, Vol. I, p. 242.

[3]) Ср. *Isaac Sharpless,* English Education, New York, 1892; *H. F. Reddall,* School-boy Life in Merrie England, New York, 1891; *John Timbs,* School-Days of Eminent Men, London.

ности обыденной жизни и заставляли мальчиковъ учиться считать и производить наиболѣе простыя вычисленія, но мы можемъ съ увѣренностью сказать, что до конца прошлаго*) столѣтія обыкновенный ученикъ одной изъ знаменитыхъ англійскихъ общественныхъ школъ не могъ раздѣлить 2021 на 43, хотя такія задачи и рѣшались за много столѣтій передъ тѣмъ по руководствамъ Брахмагупты и Бхаскары мальчиками, воспитывавшимися на берегахъ отдаленнаго Ганга. Говорятъ, что Карлъ XII шведскій человѣка, не знающаго ариѳметики, считалъ человѣкомъ только на половину. Не такого мнѣнія держались англійскіе джентльмены. Они не только не изучали ариѳметики, но и считали ее ниже своего достоинства. Если вѣрить даннымъ Тимбсомъ свѣдѣніямъ о вышедшей въ 1622 году книгѣ, озаглавленной *Peacham's Compleat Gentleman* (Пичама полное руководство для свѣтскаго человѣка), которое перечисляетъ предметы, считавшіеся въ то время подходящими для образованія англичанина высшаго круга, то оказывается, что начала астрономіи, геометріи и механики считались уже заслуживавшими вниманія джентльмена, тогда какъ объ ариѳметикѣ все еще не упоминалось[1]). Послушаемъ другого писателя Эдмунда Уэльса (Wells). Въ своей книгѣ *Young Gentleman's Course in Mathematicks* (Курсъ математики для свѣтскаго юноши, London, 1714) этотъ талантливый авторъ задается цѣлью служить свѣтскому воспитанію, которое онъ противополагаетъ воспитанію „низшей части человѣчества“ [2]). Онъ выражаетъ надежду, что тѣ, кого Богъ избавилъ отъ необходимости работать, будутъ упражнять свои способности для вящей его славы. Но они не должны „судить слишкомъ поспѣшно и легкомысленно, полагая, что умѣніе вести счеты необходимо только для людей низшаго званія, подобныхъ лавочникамъ и купцамъ“; хотя бы для того, чтобы умѣть заботиться о самомъ себѣ, „ни одинъ джентльменъ не долженъ считать, что ариѳметика ниже его достоинства, какъ не считаетъ онъ ниже своего достоинства владѣть

---

*) т. е. восемнадцатаго.

1) *Timbs*. School-Days. p. 101.

2) *De Morgan*. Arith. Books, p. 64.

имѣніемъ". Всѣ дошедшія до насъ свѣдѣнія о воспитаніи высшихъ классовъ приводятъ къ тому заключенію, что ариѳметика находилась въ пренебреженіи, и что Де Морганъ [1]) былъ правъ, утверждая, что еще въ восемнадцатомъ столѣтіи не могло быть и рѣчи о преподаваніи математики въ такихъ школахъ, какъ Итонъ. Въ 1750 году Warren Hastings, учившійся въ Уинчестерѣ, былъ помѣщенъ въ коммерческую школу, чтобы быть въ состояніи изучить ариѳметику и бухгалтерію до своего отплытія въ Бенгалію.

Въ университетахъ до средины семнадцатаго столѣтія для математики было сдѣлано очень мало. Какъ кажется, сочиненіемъ Тонсталля пользовались въ Кэмбриджѣ около 1550 г., но въ 1570 г., въ царствованіе королевы Елизаветы, были изданы новые статуты, исключающіе математику изъ круга обязательныхъ для студентовъ предметовъ,—вѣроятно, потому, что изученіе ея имѣло связь съ практической жизнью и поэтому не могло заслуживать вниманія въ университетскомъ преподаваніи [2]).

Коммерческій элементъ въ старыхъ ариѳметикахъ и алгебрахъ былъ, конечно, очень силенъ. Замѣтимъ, сколько мѣста посвящаетъ арабскій писатель Мухаммедъ ибнъ Мусâ и итальянскіе авторы разсужденіямъ о денежныхъ расчетахъ, товариществѣ и наслѣдствахъ. Многозначителенъ тотъ фактъ, что самая ранняя англійская алгебра посвящена Рекордомъ компаніи купцовъ спекуляторовъ, ведшихъ торговлю съ Москвою [3]). Райтъ въ своемъ англійскомъ изданіи Неперовыхъ логариѳмовъ точно такъ же обращается къ коммерческимъ классамъ: „Достопочтенной и высокоуважаемой компаніи Лондонскихъ купцовъ, ведущихъ торговлю съ Остъ-Индіей, Самуилъ Райтъ желаетъ всякаго благополучія въ сей жизни и блаженства въ жизни будущей" [4]) *). Много-

---

[1]) Arith. Books, p. 76.

[2]) *Ball.* Mathematics at Cambridge, p. 13,

[3]) *G. Heppel,* 19th General Report (1893) of the A. I. G. T, pp. 26, 27.

[4]) *Napier's* Construction (*Macdonald's* Ed.), p, 145,

*) „To the Right Honourable And Right Worshipfvll Company Of Merchants of London trading to the East-Indies, Samvel Wright wisheth all prosperitie in this life and happinesse in the life to come".

значительно также то, что первый начальникъ Merchant Taylor's School, реформаторъ, который по своимъ взглядамъ стоялъ впереди своего вѣка, въ книгѣ, написанной въ 1581 г., говоря о преподаваніи математики, полагаетъ, что нѣкоторые изъ наиболѣе прилежныхъ и даровитыхъ учениковъ могли бы надѣяться достигнуть нѣкоторыхъ познаній по геометріи и ариѳметикѣ, изучая Евклидовы *Начала,* но совершенно не упоминаетъ объ ариѳметикѣ Рекорда, между тѣмъ какъ съ 1540 года эта книга не переставала выходить въ различныхъ изданіяхъ [1]). Педагоги того времени не были, повидимому, освѣдомлены о новѣйшихъ успѣхахъ математики.

Это презрѣніе къ искусству вычисленія и невѣжество въ отношеніи этого искусства у всѣхъ другихъ классовъ, кромѣ торговаго, замѣчаются въ Германіи такъ же, какъ и въ Англіи. Кэстнеръ [2]) упоминаетъ объ этомъ, говоря о Латинскихъ школахъ въ Германіи; Унгеръ нѣсколько разъ ссылается на этотъ фактъ [3]).

Только въ настоящемъ столѣтіи ариѳметика и другіе отдѣлы математики были допущены въ англійскія общественныя школы. Въ Harrow „обыкновенныя дроби, Евклидъ, географія и новая исторія стали впервые изучаться" въ 1829 г. [4]). Въ Merchant Taylors' School „математика, чистописаніе и ариѳметика были прибавлены въ 1829 году" [5]). Въ Итонѣ „математика не была обязательна до 1851 г." [6]). Вожакомъ движенія противъ исключительнаго преподаванія классиковъ въ англійскихъ школахъ былъ д-ръ Томасъ Арнольдъ изъ Рёгби, отецъ Маттью Арнольда. Д-ръ Арнольдъ рекомендовалъ введеніе математики, естественныхъ наукъ, исторіи и политики.

Такъ какъ искусство вычисленія такъ же мало считалось принадлежностью благороднаго воспитанія, какъ и искус-

---

[1]) *G. Heppel,* op. cit., p. 28.

[2]) *Kästner.* Geschichte, III, p. 429.

[3]) *Unger,* pp. 5, 24, 112, 140, 144.

[4]) *Reddall,* p. 228.

[5]) *Timbs,* p. 84.

[6]) *Sharpless,* p. 144.

ство шить сапоги, то весьма естественно, что изученіе ариѳметики было загнано въ коммерческія школы. Бѣдный мальчикъ иногда изучалъ ариѳметику, богатый же мальчикъ въ ней не нуждался. Въ Латинскихъ школахъ она была неизвѣстна, но ее иногда изучали въ школахъ для бѣдныхъ; такъ, напримѣръ, „въ свободномъ училищѣ (free grammar school), основанномъ въ 1553 году однимъ лондонскимъ торговцемъ колоніальными товарами для обученія тридцати сыновей бѣднѣйшихъ людей изъ Гильдфорда англійскому чтенію и письму и искусству въ совершенствѣ вести счета такъ, чтобы изъ нихъ могли выйти хорошіе „ученики“ *) [1]). Нечего удивляться тому, что наука, значеніе которой для дисциплины ума не сознавалось, и которая изучалась исключительно съ матеріальными расчетами, не могла получить болѣе полнаго развитія. Напротивъ, было весьма естественно, что она совершенно потеряла черты, принадлежащія собственно наукѣ и приняла форму искусства. Такимъ образомъ, ариѳметика обратилась въ простое собраніе правилъ. Древніе карѳагеняне подобно англичанамъ изучали ариѳметику, но она не развилась у нихъ въ науку. „Превосходно свидѣтельствуетъ о высокихъ качествахъ греческаго ума тотъ фактъ, что Платонъ и другіе писатели считаютъ причиной низкаго состоянія ариѳметики и математики у финикіянъ . . . отсутствіе свободнаго и безкорыстнаго изслѣдованія“ [2]).

Нужно замѣтить, что въ разсматриваемый періодъ ариѳметика не испытывала вліянія лучшихъ математическихъ умовъ Англіи. Выдающіеся ученые держались въ сторонѣ отъ преподавателей элементарной науки, руководства по ариѳметикѣ писались людьми съ ограниченнымъ образованіемъ. Въ семнадцатомъ и восемнадцатомъ столѣтіяхъ въ Англіи не было для составленія руководствъ по ариѳметикѣ ни Тонсталля и Рекорда, ни Стифеля и Регіомонтана, ни Пачіоли и Тартальи. Конечно, въ Англіи жили тогда Вал-

*) въ ремеслѣ или торговлѣ (apprentices).

[1]) *Timbs,* p. 83.

[2]) *J. K. F. Rosenkranz,* Philosophy of Education, translated by *A. C. Brackett,* New York, 1888, p. 215.

лисъ и Ньютонъ, Котсъ, Хукъ, Тэйлоръ, Маклоринъ, Де Муавръ, но они не писали книгъ для начальныхъ школъ, они не оказали никакого вліянія на преподаваніе ариѳметики. Сравните это время съ настоящимъ столѣтіемъ. Подумайте о трудахъ Августа Де Моргана, затраченныхъ имъ на реформу элементарнаго математическаго образованія. Человѣкъ, который могъ написать блестящее сочиненіе по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, который могъ дѣлать новыя открытія въ высшей алгебрѣ, въ теоріи рядовъ и въ логикѣ, тотъ же человѣкъ перевелъ съ французскаго ариѳметику Бурдона, составилъ учебники ариѳметики и элементарной алгебры для учениковъ младшаго возраста и сдѣлалъ попытку упростить, безъ потери строгости, Евклидову геометрію. Просмотрите затѣмъ списокъ членовъ „Ассоціаціи для усовершенствованія преподаванія геометріи"*) и Комитета Британской Ассоціаціи, занимающагося вопросомъ о преподаваніи геометріи, и вы найдете тамъ имена наиболѣе блестящихъ англійскихъ математиковъ нашего времени.

Недостатокъ обмѣна мыслей между писателями по высшимъ отдѣламъ науки и авторами элементарныхъ руководствъ ясно виденъ въ математическихъ трудахъ Джона Уарда (Ward) изъ Честера. Въ 1695 году онъ издалъ въ свѣтъ *Руководство по алгебрѣ (Compendium of Algebra)*, а въ 1706 году *Спутникъ молодого математика (Young Mathematician's Guide)*. Это послѣднее сочиненіе появилось 12-мъ изданіемъ въ 1771 г., было широко распространено въ Великобританіи и одобрено всѣми университетами Англіи, Шотландіи и Ирландіи. Одно время эта книга была любимымъ руководствомъ въ американскихъ коллегіяхъ, уже въ 1737 году ею пользовались въ Харвардъ Колледжѣ и еще въ 1787 году она употреблялась въ Йэллѣ и Дартмутѣ. Сочиненіе это на 475 страницахъ излагало ариѳметику, алгебру, геометрію, коническія сѣченія и ариѳметику безконечно-малыхъ, давая, разумѣется, только самыя первоначальныя свѣдѣнія по каждому изъ этихъ отдѣловъ науки.

---

*) „Association for the Improvement of Geometrical Teaching", сокращенно — A. I. G. T.

Уардъ показываетъ, какъ возводить двучленъ въ степени съ цѣлыми положительными показателями, „не прибѣгая къ непрерывному возвышенію въ степень“ *), и замѣчаетъ, что, когда онъ опубликовалъ этотъ методъ въ своей книгѣ *Compendium of Algebra,* то полагалъ, что первый открылъ его, но съ тѣхъ поръ изъ Валлисовой *Исторіи Алгебры* онъ узналъ, „что ученый сэръ Исаакъ Ньютонъ уже давно открылъ его“. Нужна была четверть вѣка, чтобы вѣсть объ открытіи бинома Ньютона дошла до Джона Уарда. Странно, кромѣ того, видѣть въ Уардовомъ *Спутникѣ* 1771 года — больше, чѣмъ черезъ сто лѣтъ *послѣ* того, какъ Ньютонъ открылъ исчисленіе флюксій,— родъ интегральнаго исчисленія, подобнаго тому, которымъ пользовались Валлисъ, Кавальери, Ферматъ и Роберваль *до* изобрѣтенія флюксій.

Трудно найти такое время, когда въ какой-нибудь цивилизованной странѣ авторы сочиненій по высшей математикѣ, съ одной стороны, и авторы элементарныхъ руководствъ, съ другой,— стояли бы дальше другъ отъ друга, чѣмъ въ Англіи въ теченіе двухъ съ половиной вѣковъ, предшествовавшихъ 1800 году. Мы не можемъ придумать ни одного случая въ исторіи науки, когда недостатокъ вліянія лучшихъ умовъ на людей среднихъ способностей приводилъ бы къ такимъ плачевнымъ результатамъ. Въ послѣднее время слышались жалобы на то, что въ нѣкоторыхъ странахъ практическая химія не пользуется результатами теоретической науки. Высказывались опасенія, что произойдетъ расколъ между прикладной высшей математикой и чистой высшей математикой. Но до сихъ поръ эти бѣды кажутся намъ незначительными, когда мы сравнимъ ихъ съ широко распространившимся подавленіемъ и разрушеніемъ теоретической ариѳметики, происшедшимъ отъ того, что высшіе умы не умѣли взять на себя руководства заурядными людьми. Авторы руководствъ по ариѳметикѣ въ Англіи (такъ же, какъ и въ Германіи и во Франціи) были въ пренебреженіи у великихъ мыслителей своего времени; люди съ положеніемъ ихъ презирали; подстрекаемые только соображеніями о

*) „without the trouble of continued involution“.

чисто матеріальныхъ выгодахъ, они пошли по пути, который въ теченіе цѣлыхъ столѣтій пятналъ страницы исторіи педагогики.

Въ тѣ времена англійскіе и нѣмецкіе юноши часто готовились къ занятію торговлей, посѣщая школы чистописанія и ариѳметики. Въ средніе вѣка и даже долго послѣ изобрѣтенія книгопечатанія искусство письма пользовалось большимъ уваженіемъ. Въ школахъ чистописанія большое вниманіе обращалось на умѣніе писать красиво. Школы, въ которыхъ обучали обоимъ предметамъ, всегда назывались школами „письма и ариѳметики" („writing and arithmetic"), а не наоборотъ „ариѳметики и письма". Преподавателя называли „учителемъ чистописанія и ариѳметики („writing-master and arithmetician"). Коккеръ умѣлъ искусно писать, и составилъ больше руководствъ по каллиграфіи, чѣмъ по ариѳметикѣ. Что касается качества преподавателей, то Пичамъ въ своемъ *Полномъ руководствѣ для свѣтскаго человѣка* (1622), клеймитъ учителей своего времени, говоря, что они грубо и даже варварски обращаются со своими учениками. Домашніе воспитатели, по его словамъ, были еще хуже [1]). О томъ, какъ возникали многія коммерческія школы, можно видѣть изъ слѣдующаго извлеченія изъ ариѳметики Виллльяма Уэбстера (William Webster), напечатанной въ Лондонѣ въ 1740 году [2]). „Человѣкъ, испробовавшій всѣ средства и все-таки потерпѣвшій неудачу, если только онъ можетъ нацарапать что-нибудь, хоть сколько-нибудь разборчивымъ *Почеркомъ,* хотя бы и неловкимъ и неестественнымъ, и если онъ знаетъ *Ариѳметику* настолько, что можетъ сосчитать, сколько минутъ въ году и дюймовъ въ милѣ, находитъ прибѣжище на какомъ-нибудь чердакѣ и съ помощью вывѣсочнаго живописца превращается въ преподавателя *чистописанія* и *ариѳметики*; тамъ, на приманку низкой платы за ученіе, онъ ловитъ иногда нѣсколькихъ учениковъ". Безъ сомнѣнія, въ тѣ времена, какъ и во всѣ другія, попадались и хорошіе преподаватели, но большинство школь-

---

[1]) *Timbs,* p. 101.

[2]) *De Morgan,* Arith. Books, p. 69.

ныхъ учителей въ Англіи, Германіи и въ американскихъ колоніяхъ были того типа, который описанъ въ приведенномъ нами отрывкѣ. Нѣкоторые изъ этихъ учителей, пользовавшіеся большимъ успѣхомъ и болѣе честолюбивые, чѣмъ другіе, писали руководства по ариѳметикѣ для школъ. Неудивительно, что эти руководства и самое преподаваніе стояли такъ низко.

Причины, препятствовавшія развитію теоретической ариѳметики, можно изложить вкратцѣ слѣдующимъ образомъ:

(1) Ариѳметику изучали не ради самой науки и не цѣнили ея значенія для воспитанія ума; поэтому изучали ее только коммерческіе классы, ради матеріальныхъ выгодъ, которыя доставляло знаніе ариѳметическихъ правилъ.

(2) Лучшіе умы не умѣли оказать вліянія на людей средняго уровня и руководить ими при составленіи руководствъ по ариѳметикѣ.

Реформы въ преподаваніи ариѳметики.

Въ началѣ девятнадцатаго вѣка была произведена большая реформа въ начальномъ преподаваніи; инаціаторы этой реформы появились въ Швейцаріи и въ Германіи. Песталоцци съ особенной силой настаивалъ на необходимости нагляднаго преподаванія при всякомъ обученіи. „Изъ всѣхъ предметовъ, которымъ обучали въ Ивердёнѣ, съ наибольшимъ успѣхомъ, по мнѣнію тѣхъ, которые посѣтили эту школу, преподавалась ариѳметика. Говорятъ, что дѣти рѣшали въ умѣ и съ большой быстротой очень трудныя задачи. Здѣсь, какъ и въ другихъ предметахъ, Песталоцци основалъ свой методъ на томъ положеніи, что каждый отдѣльный человѣкъ долженъ быть приведенъ къ знанію по пути, подобному тому, которому слѣдовало все человѣчество при созданіи науки. Дѣйствительный счетъ предметовъ предшествовалъ первому Коккеру, какъ и дѣйствительное измѣреніе земли предшествовало Евклиду. Нужно научить ребенка считать различныя вещи и заставить его находить различные процессы счета на опытѣ, въ области конкретныхъ предметовъ, прежде чѣмъ давать ему какія-либо

абстрактныя правила или заставлять его рѣшать отвлеченные примѣры. Такой планъ преподаванiя принятъ теперь въ нѣмецкихъ школахъ; тамъ введено было много остроумныхъ приспособленiй, позволяющихъ представить дѣтямъ наглядно различныя сочетанiя вещей“ [1]).

Послѣдователямъ Песталоцци оставалось еще много сдѣлать для практическаго осуществленiя его идей. Сверхъ того, нужно было передѣлать весь курсъ ариѳметики, такъ какъ Песталоцци совершенно пренебрегалъ тѣми частями ариѳметики, которыя прилагаются къ обыденной жизни. Приблизительно до 1840 г. болѣе или менѣе строго придерживались воззрѣнiй Песталоцци. Въ 1842 г. появилось руководство A. W. Grube, *Leitfaden*, основанное на идеѣ Песталоцци о наглядномъ обученiи; Грубе, однако, вмѣсто того, чтобы держаться обыкновеннаго порядка изложенiя сложенiя, вычитанiя, умноженiя и дѣленiя, рекомендовалъ исключать изъ обученiя, въ началѣ, большiя числа и обучать производству всѣхъ четырехъ дѣйствiй въ предѣлѣ перваго круга чиселъ (скажемъ, чиселъ отъ 1 до 10), а затѣмъ уже переходить къ болѣе широкому кругу. Въ теченiе нѣкотораго времени въ Германiи пробовали обучать ариѳметикѣ по методѣ Грубе, но она скоро встрѣтила рѣшительное противодѣйствiе. Опытъ, какъ преподавателей, такъ и учащихся, приводитъ, повидимому, къ тому заключенiю, что для достиженiя удовлетворительныхъ результатовъ требуется необычайная затрата энергiи. Выражаясь языкомъ физики, можно сказать, что метода Грубе похожа на машину съ небольшимъ коэффицiентомъ полезнаго дѣйствiя [2]).

Въ консервативную Англiю идеи Песталоцци проникли поздно. Когда Де Морганъ началъ писать (около 1830 г.), преподаванiе ариѳметики стояло немногимъ выше того уровня, на которомъ было оно въ восемнадцатомъ столѣтiи.

[1]) *R. H. Quick*, Educational Reformers, 1879, p. 191.

[2]) Исторiю преподаванiя ариѳметики въ Германiи въ девятнадцатомъ вѣкѣ см. у *Унгера*, pp. 175—233. Критику методы Грубе съ точки зрѣнiя психологiи см. въ книгѣ *McLellan and Dewey*, Psychology of Number, 1895, p. 80 et seq.

Въ болѣе близкое къ намъ время преподаванiе ариѳметики подверглось обсужденiю въ „Ассоцiацiи для усовершенствованiя преподаванiя геометрiи“ (Association for the Improvement of Geometrical Teaching)[1]. Среди другихъ предметовъ разсматривалось умноженiе и дѣленiе конкретныхъ количествъ, приближенное умноженiе десятичныхъ дробей (съ отбрасыванiемъ послѣднихъ десятичныхъ знаковъ произведенiя), а также измѣненiя въ прiемахъ вычитанiя, умноженiя и дѣленiя. Новые способы вычитанiя и дѣленiя называются въ Германiи „австрiйскими методами“, потому что австрiйцы первые приняли эти способы. Въ Англiи дѣленiе по такому способу носитъ названiе „итальянской методы[2]).

„Австрiйская“ метода вычитанiя состоитъ просто въ слѣдующемъ: вычитанiе нужно производить такъ же, какъ даютъ „сдачу“ въ лавкахъ, получая, посредствомъ сложенiя большее число изъ меньшаго, вмѣсто того, чтобы переходить отъ большого числа къ меньшему посредствомъ вычитанiя въ умѣ. Такъ, при вычитанiи 76 — 49, слѣдуетъ говорить „девять да *семь* шестнадцать, пять да *два* семь“. Прiемъ, по которому мы прибавляемъ 1 къ 4, вмѣсто того, чтобы вычитать 1 изъ 7, былъ очень распространенъ въ эпоху Возрожденiя. Такимъ прiемомъ пользовались, напримѣръ, Максимъ Планудъ, Георгъ Пейербахъ и Адамъ Ризе. Въ своихъ сочиненiяхъ Адамъ Ризе приближается также къ способу, по которому разность опредѣляютъ, начиная счетъ съ вычитаемаго. Въ нашемъ примѣрѣ Ризе поступилъ бы такъ: онъ вычелъ бы 9 изъ 10, прибавилъ бы оставшуюся 1 къ уменьшаемому 6 и получилъ бы такимъ образомъ отвѣтъ 7[3]). Новѣйшiй американскiй учебникъ алгебры объясняетъ вычитанiе, основывая его на принципѣ „австрiйской методы“.

---

[1]) См. General Report, начиная съ 1888 г., въ особенности за 1892 и 1893 г.г.

[2]) Mr. Langley нашелъ названiе „итальянская метода“ еще въ английской ариѳметикѣ 1730 года. См. General Report of A. I. G. T. за 1892 г., p. 34.

[3]) *Arno Sadowski*, Die österreichische Rechenmethode in pädagogischer und historischer Beleuchtung, Königsberg, 1892, p. 13.

При умноженіи рекомендуется начинать, какъ въ алгебрѣ, съ высшаго разряда множителя. Большое преимущество такого пріема обнаруживается при десятичномъ умноженіи въ томъ случаѣ, когда мы хотимъ получить только приближенный результатъ съ точностью, скажемъ, до трехъ или пяти десятичныхъ знаковъ. Мы видѣли, что этотъ способъ умноженія былъ въ большомъ употребленіи у флорентинцевъ, и что Пачіоли называлъ его умноженіемъ „посредствомъ маленькаго замка". Изъ различныхъ пріемовъ умноженія эпохи Возрожденія наиболѣе приспособленный къ существованію не пережилъ другихъ [1]). Пріемъ вычисленія, преимущества котораго мы теперь защищаемъ, былъ показанъ еще Николаемъ Пайкомъ [2]) на слѣдующемъ примѣрѣ: „Требуется умножить 56·7534916 на 5·376928, сохранивъ въ произведеніи только пять десятичныхъ знаковъ".

```
56·7534916
82 9673·5
------------------
28376746 . .
 1702605 . . .
  397274 . . . .
   34052 . . . . .
    5108 . . . . . .
     113 . . . . . . .
      45 . . . . . . . .
------------------
305·15943
```

„Австрійская", или „итальянская", метода дѣленія состоитъ просто въ томъ, что производится одновременно умноженіе дѣлителя и вычитаніе изъ дѣлимаго, такъ что только остатокъ пишется на бумагѣ, какъ это видно изъ приводимаго нами примѣра.

```
978)272862(279
     7726
      8802
```

---

[1]) Этотъ пріемъ рекомендованъ былъ еще Лагранжемъ. Онъ говоритъ: „Но ничто не заставляетъ насъ начинать съ правой стороны множителя; такъ же хорошо можемъ мы начинать вычисленіе и слѣва, и я право не могу понять, почему этотъ методъ не пользуется предпочтеніемъ: большое преимущество его состоитъ въ томъ, что онъ даетъ сначала цифры высшихъ разрядовъ; при умноженіи же большихъ чиселъ эти цифры часто являются для насъ наиболѣе интересными". См. *H. Niedermüller,* Lagrange's Mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe, Leipzig, 1880, p. 23. Это изданіе, содержащее пять лекцій по ариѳметикѣ и алгебрѣ, прочитанныхъ великимъ Лагранжемъ въ Нормальной Школѣ въ Парижѣ въ 1795 г., очень интересно во многихъ отношеніяхъ.

[2]) *N. Pike.* Arithmetic, abridged for the use of schools, 3d Ed., Worcester, 1798, p. 92.

Сомнительно, слѣдуетъ ли предпочесть эту методу нашему старому способу дѣленія, развѣ только въ томъ случаѣ, когда вычислитель обладаетъ прирожденной способностью къ быстрому счету. Мы опасаемся, что медленный вычислитель будетъ при такомъ вычисленіи сберегать бумагу, но зато будетъ затрачивать больше умственной энергіи. „Австрійскій способъ дѣленія“ не совсѣмъ новъ; въ методахъ „галеры“ и „помарокъ“ частныя произведенія не записывались, а вычитались сразу, и записывались только остатки. Принципомъ „австрійской методы“ пользовались еще индусы; способъ помарокъ есть лишь графическое представленіе употреблявшихся ими пріемовъ [1]).

Ариѳметика въ Соединенныхъ Штатахъ.

Вѣса и мѣры. — Вѣса и мѣры, введенные въ Соединенныхъ Штатахъ, заимствованы были у англичанъ. „Всѣ вѣса и мѣры въ Соединенныхъ Штатахъ дѣлались по образцамъ англійскаго казначейства (exchequer) до тѣхъ поръ, пока Конгрессъ не установилъ собственныхъ образцовъ. Въ Луизіанѣ признавались сначала образцы, заимствованные у французовъ, но въ 1814 г. были установлены закономъ указныя мѣры Соединенныхъ Штатовъ (United States revenue standards) [2]). Однако, тѣ образцы, которые дѣйствительно употреблялись въ различныхъ штатахъ и въ таможняхъ, оказались очень неточными. Съ цѣлью изготовленія точныхъ образцовъ для употребленія въ Америкѣ, наше правительство пригласило на службу *Фердинанда Рудольфа Гасслера (F. R. Hassler),* швейцарца по рожденію и воспитанію, искуснаго экспериментатора [3]). Работа по

---

[1]) Дальнѣйшія свѣдѣнія объ „австрійскомъ“ методѣ вычитанія и дѣленія можно найти въ упомянутомъ уже сочиненіи *Садовскаго;* см. также *Unger,* pp. 213—218.

[2]) Report of the Secretary of the Treasury on the Construction and Distribution of Weights and Measures. Ex. Doc. No. 27, 1857, p. 36.

[3]) Ср. мемуары Фердинанда Рудольфа Гесслера въ переводѣ съ нѣмецкаго, сдѣланномъ *Эмилемъ Цшокэ (Emil Zschokke)* и изданномъ въ Аарау, въ Швейцаріи, въ 1877 г; съ дополнительными документами издано въ Ниццѣ въ 1882 г. См. также Teach. and Hist. of Math. in the U. S., pp. 286 — 289.

изготовленію образцовъ началась въ 1835 г. [1]). Въ 1836 г. тщательно изготовленные образцы были распредѣлены по таможнямъ, что дало возможность достигнуть равномѣрнаго взиманія пошлинъ. Кромѣ того, точные образцы были розданы союзнымъ правительствомъ отдѣльнымъ штатамъ, съ цѣлью достиженія большаго однообразія. Каждому штату рекомендовалось приготовить для этихъ образцовъ несгораемое помѣщеніе и отдать ихъ „на попеченіе какого-нибудь научно-образованнаго лица, способнаго смотрѣть за правильнымъ ихъ употребленіемъ и храненіемъ ихъ въ цѣлости".

Въ 1866 году Конгрессъ узаконилъ употребленіе метрической системы, но, къ сожалѣнію, на этомъ и остановился и позволилъ народамъ европейскаго континента далеко опередить насъ въ этомъ отношеніи: у нихъ метрическая система совершенно вытѣснила всѣ старыя системы мѣръ.

Въ денежныхъ знакахъ американскихъ колоній существовало большое разнообразіе, и система ихъ была очень запутана. Во время введенія нашей десятичной монетной системы Конгрессомъ, въ 1786 году, *колоніальные денежные знаки (colonial currency)* или *кредитные билеты (bills of credit)*, выпущенные колоніями, упали въ цѣнѣ, и, такъ какъ это уменьшеніе было неодинаковымъ въ различныхъ колоніяхъ, то въ различныхъ Штатахъ возникли денежные знаки разной стоимости [2]). Такъ какъ наши старые учебники ариѳметики были учебниками „практической" ариѳметики, то они, разумѣется, давали правила для „приведенія монетъ" („reduction of coin"). Такъ, *Ариѳметика* Пайка [3]) посвящаетъ двадцать двѣ страницы изложенію и объясненію на примѣрахъ правилъ для приведенія „денежныхъ знаковъ Нью-Хемпшира, Массачусетса, Родайланда, Коннектикута и Виргиніи" (1) къ „Союзнымъ деньгамъ", (2) къ „денежнымъ знакамъ Нью-Іорка и Сѣверной Каролины", (3) къ „денежнымъ знакамъ Пенсильваніи, Ньюджерси, Делавара и

[1]) Ex. Doc. No. 84 (Report by A. D. Bache for 1846—47), p. 2.

[2]) *Robinson,* Progressive Higher Arithmetic, 1874, p. 190.

[3]) The New and Complete System of Arithmetic, abridged for the use of schools, 3d Ed. 1798, Worcester, pp. 117—139.

Мариленда . . .“, (6) къ „ирландскимъ деньгамъ“, (7) къ „денежнымъ знакамъ Канады и Новаскотіи“, (8) къ „Livres Tournois“, (9) къ „испанскимъ чеканнымъ долларамъ (Spanish milled dollars)“. Затѣмъ слѣдуютъ правила для приведенія Союзныхъ денегъ къ „денежнымъ знакамъ Новой Англіи и Виргиніи“ и т. д. Легко видѣть, какъ много времени уходило у учениковъ на усвоеніе этихъ правилъ. Главы, посвященныя приведенію денегъ, двѣнадцатиричнымъ дробямъ, смѣшенію и т. д., свидѣтельствуютъ о томъ, какую дань педагогика должна была уплачивать практической жизни, жертвуя при этомъ такимъ учебнымъ матеріаломъ, который могъ бы гораздо лучше содѣйствовать развитію юныхъ умовъ. Съ цѣлью доставлять учащимся свѣдѣнія, необходимыя въ торговыхъ дѣлахъ, учебники ариѳметики разсуждали о такихъ предметахъ, какъ государственныя цѣнныя бумаги Соединенныхъ Штатовъ и различныя правила, принятыя Соединенными Штатами и правительствами отдѣльныхъ штатовъ относительно частичныхъ погашеній.

Авторы и книги. Первые учебники ариѳметики, употреблявшіеся въ американскихъ колоніяхъ, принадлежали англійскимъ авторамъ: Коккеру, Ходдеру, Дильворту, „Джоржу Фишеру“ (Mrs. Slack), Даніелю Фенингу [1]). Самое раннее руководство по ариѳметикѣ, написанное и напечатанное въ Америкѣ, появилось безъ имени автора въ Бостонѣ въ 1729 году. Хотя это сочиненіе обладало большими достоинствами, оно, повидимому, было очень мало распространено; въ старыхъ книгахъ мы не встрѣтили ни одной ссылки на него; пятьдесятъ лѣтъ спустя вышла въ свѣтъ *Ариѳметика* Пайка, о Бостонской анонимной ариѳметикѣ совершенно забыли и стали считать Пайкову книгу первымъ американскимъ руководствомъ по этому предмету. Въ Харвардской библіотекѣ есть два экземпляра ариѳметики 1729 года; одинъ экземпляръ находится въ библіотекѣ Конгресса [2]). Въ *Энциклопедіи американской біографіи* Эпльтона (Appleton's

---

[1]) См. Teach. and Hist. of Math. in the U. S., pp. 12—16.

[2]) Тамъ же, p. 14.

Cyclopœdia of American Biography) авторство этой книги приписывается безъ всякаго колебанія Исааку Гринвуду (Isaac Greenwood), бывшему тогда профессоромъ математики въ Харвардъ-Колледжѣ; на заглавной страницѣ одного изъ экземпляровъ Харвардской библіотеки есть, однако, слѣдующая надпись: „Полагаютъ, что авторомъ этой книги былъ Самуилъ Гринвудъ, другіе говорятъ, что это былъ Исаакъ Гринвудъ". Въ 1788 г. появилась въ Ньюбёрипортѣ *Новая и полная система ариѳметики* (*New and Complete System of Arithmetic,* Newburyport, 1788) Николая Пайка (Nicholas Pike, 1743 — 1819), получившаго ученую степень въ Харвардскомъ Колледжѣ [1]). Книга эта предназначалась для учащихся старшаго возраста и содержала, кромѣ предметовъ, излагавшихся обыкновенно въ ариѳметикахъ того времени, логариѳмы, тригонометрію, алгебру и коническія сѣченія; изложеніе этихъ послѣднихъ предметовъ было, однако, такъ кратко, что могло имѣть очень мало значенія. Въ предисловіи къ сокращенію этой книги для употребленія въ школахъ („Abridgment for the Use of Schools", Worcester, 1793) говорится, что полное сочиненіе „употребляется теперь, какъ классическое руководство, во всѣхъ университетахъ Новой Англіи". Одинъ изъ писателей нашего времени [2]) возлагаетъ на Пайка отвѣтственность за всѣ тѣ злоупотребленія въ преподаваніи ариѳметики, которыя царили въ старыхъ американскихъ школахъ. Намъ кажется, однако, совершенно несправедливымъ такое осужденіе Пайка. Онъ не заслужилъ его, хотя и слѣдуетъ признать, что его ни въ какомъ смыслѣ нельзя считать реформаторомъ среди авторовъ руководствъ по ариѳметикѣ. Большая часть недостатковъ, о которыхъ идетъ рѣчь, появились задолго до времени Пайка. Книга нашего автора нисколько не ниже современныхъ ей англійскихъ руководствъ. Мы можемъ съ такимъ же правомъ порицать его за то, что онъ даетъ доли фунтовъ и шиллинговъ, излагаетъ правила „тары и

---

[1]) Тамъ же, pp. 45 — 46.

[2]) *George H. Martin,* The Evolution of the Massachusetts Public School System, p. 102.

третты“, разсуждаетъ о „приведенiи монетъ“, съ какимъ будущiй историкъ сможетъ порицать современныя намъ руководства, въ которыхъ встрѣчаются такiя ужасныя равенства, какъ 3 фута = 1 ярду, $5\frac{1}{2}$ ярд. = 1 роду, $30\frac{1}{4}$ кв. ярд. = 1 кв. роду и т. д. Пока нашъ свободный и независимый народъ желаетъ быть связаннымъ такими остатками варварства, авторамъ руководствъ приходится доставлять ему средства къ прiобрѣтенiю этихъ драгоцѣнныхъ знанiй.

Въ началѣ девятнадцатаго столѣтiя въ Соединенныхъ Штатахъ было три „великихъ ариѳметика“: Николай Пайкъ, Данiилъ Адамсъ (Daniel Adams) и Натанъ Даболль (Nathan Daboll). Руководства Адамса (1801) и Даболля (1800) обращали больше вниманiя, чѣмъ Пайково руководство, на Союзныя деньги. Петръ Парли (Peter Parley) говоритъ, что, благодаря всеобщему употребленiю въ теченiе болѣе ста лѣтъ учебника Дильворта въ американскихъ школахъ, нѣсколько послѣдовательныхъ поколѣнiй считали слова фунтъ и шиллингъ классическими, слова же долларъ и центъ вульгарными. Сказать: „я не далъ бы за это ни одного пенни“ было признакомъ благороднаго воспитанiя; выраженiе: „я не далъ бы за это и цента“ было плебейскимъ.

Реформа преподаванiя ариѳметики въ Соединенныхъ Штатахъ началась только со времени опубликованiя въ 1821 г. книги Уаррена Кольбёрна (Warren Kolburn) *„Intellectual Arithmetic“* [1]). Это былъ первый плодъ идей Песталоцци, появившiйся на американской почвѣ. Какъ и Песталоцци, Кольбёрнъ обязанъ великимъ успѣхомъ своей книги введенiю устной ариѳметики. Успѣхъ этой маленькой книжки былъ необычайнымъ. Но американскимъ преподавателямъ, какъ во времена Кольбёрна, такъ и долгое время спустя, никогда не удавалось примѣнить вполнѣ принципы Песталоцци къ письменной ариѳметикѣ. Въ школахъ ариѳметикѣ посвящали слишкомъ много времени. Нагляднаго обученiя было слишкомъ мало; то было слишкомъ

---

[1]) „First Lessons (Первые уроки) *Уаррена Кольбёрна* принесли почти столько же вреда, сколько и пользы, благодаря тому, что этой книгой злоупотребляли, давая ее дѣтямъ слишкомъ рано“.— *Rev. Thomas Hill,* The True Order of Studies, 1876, p. 42.

много малопонятныхъ разсужденій[1]), то не было вовсе никакихъ разсужденій; обращали слишкомъ мало вниманія на искусство быстрыхъ и точныхъ вычисленій и слишкомъ много вниманія на техническія подробности коммерческой ариѳметики. Въ теченіе послѣднихъ десяти лѣтъ были введены, однако, желательныя реформы[2]).

„Вопросы для забавы и развлеченія"

Въ англійскихъ и американскихъ изданіяхъ Дильворта, а также въ *Scholar's Arithmetic*[3]) Даніила Адамса мы находимъ любопытное собраніе „Вопросовъ для забавы и развлеченія" („Pleasant and diverting questions"). Мы всѣ слыхали о фермерѣ, который, имѣя съ собой лисицу, гуся и гарнецъ зерна, захотѣлъ переправиться черезъ рѣку; но такъ какъ онъ могъ перевезти одновременно только лисицу, или только гуся, или только зерно и боялся, что въ его отсутствіе лисица съѣстъ гуся или гусь зерно, то не зналъ, какъ ему быть. Кого не занимала задача о томъ, какъ три ревнивыхъ мужа со своими женами должны были переплыть рѣку въ лодкѣ, въ которой помѣщались только двое, такъ чтобы ни одна изъ трехъ женъ не оставалась въ обществѣ одного или двухъ мужчинъ, въ отсутствіе мужа? Кто не пытался помѣстить однозначныя числа внутри квадрата такъ, чтобы сумма всякихъ трехъ цифръ, лежащихъ на одной линіи, равнялась 15? Никто изъ насъ, можетъ быть, не подозрѣвалъ въ началѣ великую древность этихъ, пови-

---

[1]) „Мы смѣемъ увѣрить преподавателя, привыкшаго къ современному ошибочному методу преподаванія дѣтямъ, по которому ихъ съ самаго начала заставляютъ доказывать справедливость примѣняемыхъ ими способовъ вычисленія, что методъ, по которому умѣніе легко производить дѣйствіе пріобрѣтается раньше, чѣмъ дается объясненіе ихъ, есть методъ самой Природы; что онъ не только гораздо больше нравится ребенку, но что благодаря его примѣненію изъ этого ребенка выйдетъ впослѣдствіи лучшій математикъ".— *T. Hill,* op. cit., p. 45.

[2]) Болѣе подробную исторію преподаванія ариѳметики читатель найдетъ въ Teach. and Hist. of Math. in the U. S.

[3]) Седьмое изданіе, Montpellier, Vt., 1812, 210.

димому, только-что появившихся порожденій фантазіи. Нѣкоторыя изъ этихъ загадокъ заимствованы Дильвортомъ изъ Уингета въ изданіи Кэрси. Кэрси отсылаетъ читателя къ „весьма остроумному“ *Гаспару Баше де Мезиріаку (Gaspard Bachet de Méziriac)* и его маленькой книжкѣ *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (Lyons, 1624), которую и до сихъ поръ много читаютъ. Первая изъ упомянутыхъ загадокъ была, вѣроятно, извѣстна Карлу Великому, потому что мы находимъ ее въ Алькуиновой (?) книгѣ *Propositiones ad acuendos juvenes* въ измѣненной версіи, въ которой говорится о волкѣ, козѣ и капустѣ. Три ревнивыхъ мужа и ихъ жены были извѣстны Тартальѣ, который предлагаетъ тотъ же вопросъ также и относительно четырехъ мужей и четырехъ женъ [1]). Мы полагаемъ, что эти вопросы представляютъ собою измѣненныя и улучшенныя версіи первой задачи. Три ревнивыхъ мужа были найдены уже въ рукописи тринадцатаго столѣтія, въ которой разсказывается о томъ, какъ двое нѣмецкихъ юношей Firri и Tyrri предлагали другъ другу задачи [2]). Эта рукопись содержитъ также слѣдующую задачу: Фирри говоритъ: „Въ Кельнѣ было три брата, у которыхъ было девять сосудовъ вина. Первый сосудъ содержалъ одну кварту (amam) второй 2, третій 3, четвертый 4, пятый 5, шестой 6, седьмой 7, восьмой 8, девятый 9. Требуется раздѣлить вино поровну между тремя братьями, не смѣшивая содержимаго сосудовъ“. Этотъ вопросъ тѣсно связанъ съ третьей изъ упомянутыхъ нами выше задачъ, такъ какъ онъ приводитъ къ изображенному ниже волшебному квадрату, нужному для рѣшенія вопроса.

Волшебные квадраты были извѣстны арабамъ, а, можетъ быть, также и индусамъ. Введеніемъ въ Европу этихъ любопытныхъ и остроумныхъ произведеній математической мысли мы обязаны, повидимому, византійскому писателю Мосхопуло, жившему въ Константинополѣ въ первой половинѣ

---

[1]) *Peacock*, p. 473.

[2]) *Dr. S. Günther*, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter, Berlin, 1887, p. 35.

пятнадцатаго столѣтія. Средневѣковые астрологи вѣрили въ то, что квадраты эти обладаютъ мистическими свойствами и, будучи выгравированы на серебряной пластинкѣ, могутъ служить талисманами противъ чумы [1]). Первый полный магическій квадратъ, открытый на западѣ, это квадратъ нѣмецкаго живописца Альбрехта Дюрера, изображенный на его знаменитой гравюрѣ „Меланхолія".

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Интересна слѣдующая задача, данная у Уингэта въ изданіи Кэрси: „15 христіанъ и 15 турокъ находились въ морѣ на одномъ и томъ же кораблѣ во время ужасной бури; лоцманъ объявилъ, что необходимо бросить въ море половину этихъ лицъ, чтобы спасти остальныхъ; они всѣ сошлись на томъ, что тѣ лица, которыхъ слѣдуетъ бросить въ море, должны быть выбраны по жребію слѣдующимъ образомъ: всѣ 30 человѣкъ должны быть поставлены въ кругъ на подобіе кольца, и затѣмъ, начавъ счетъ съ одного изъ пассажировъ и продолжая его въ круговомъ порядкѣ, слѣдуетъ выбрасывать въ море каждаго девятаго до тѣхъ поръ, пока изъ 30 лицъ не останется только 15. Спрашивается, какъ нужно расположить этихъ 30 человѣкъ, чтобы жребій палъ навѣрно на 15 турокъ и не палъ ни на одного изъ 15 христіанъ?". Керси замѣняетъ цифры 1, 2, 3, 4, 5 соотвѣтственно буквами *a, e, i, o, u* и даетъ слѣдующіе стихи:

From numbers' aid and art,
Never will fame depart *).

Гласныя буквы, взятыя въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ стоятъ въ этихъ строкахъ, означаютъ поперемѣнно числа христіанъ и турокъ, которые должны быть поставлены другъ за другомъ, т. е. нужно поставить сначала $o = 4$ христіанъ, затѣмъ $u = 5$ турокъ, потомъ $e = 2$ христіанина и т. д. Баше де Мезиріакъ, Тарталья и Карданъ даютъ каж-

---

[1]) Исторію волшебныхъ квадратовъ см. въ книгѣ *Günther*, Vermischte Untersuchungen, гл. IV. Теорія ихъ изложена въ статьѣ „Magic Squares" въ *Johnson's* Universal Cyclopaedia.

*) Никогда не удалится слава отъ помощи и искусства чиселъ.

дый различные стихи для выраженія этого правила. Гегезиппъ разсказываетъ [1]), что знаменитый еврейскій историкъ Іосифъ, будучи въ пещерѣ съ 40 соотечественниками, убѣжавшими отъ римлянъ, оставшихся побѣдителями при осадѣ Іотапаты, сохранилъ свою жизнь посредствомъ уловки, подобной той, которую мы привели выше. Не желая попасться въ плѣнъ, его соотечественники рѣшили убить другъ друга. Іосифъ убѣдилъ ихъ дѣлать это по жребію и умудрился устроить такъ, что остался вмѣстѣ съ однимъ изъ своихъ товарищей. Оба они согласились остаться въ живыхъ.

Задача о 15 христіанахъ и 15 туркахъ называется у Кардана *Ludus Joseph,* или Игрою Іосифа. Та же задача находится во французскомъ сочиненіи 1484 года, написанномъ Николаемъ Шюкэ [2]), и въ рукописяхъ двѣнадцатаго, одиннадцатаго и десятаго столѣтій [3]). Даніилъ Адамсъ приводитъ въ своей ариѳметикѣ слѣдующую строфу:

„As I was going to St. Ives,
I met seven wives.
Every wife had seven sacks;
Every sack had seven cats;
Every cat had seven kits:
Kits, cats, sacks, and wives,
How many were going to St. Ives?“ *)

Если мы сравнимъ это съ задачей Фибоначи „Семь старухъ идутъ въ Римъ“ и т. д. и съ задачей въ папирусѣ Ахмеса, то мы замѣтимъ, что это самое древнее изъ „математическихъ развлеченій“ **).

Вопросы для забавы и развлеченія были введены въ нѣкоторыя англійскія руководства по ариѳметикѣ, появившіяся

---

1) De Bello Judaico, etc., III, Ch. 15.

2) *Cantor,* Vol. II, p. 332.

3) *M .Curtze,* in Biblioth. Mathem., 1894, p. 116 и 1895, pp, 34—36.

*) Когда я шелъ въ St. Ives, я встрѣтилъ семерыхъ женщинъ, у каждой женщины было по семи мѣшковъ, въ каждомъ мѣшкѣ было по семи кошекъ, у каждой кошки было по семи котятъ; сколько ихъ всѣхъ шло въ St. Ives: котятъ, кошекъ, мѣшковъ и женщинъ?

**). Ср. стр. 25 и 126 и приложеніе въ концѣ книги. *Прим. ред.*

во второй половинѣ семнадцатаго столѣтія и въ восемнадцатомъ столѣтіи. Въ Германіи предметъ этотъ нашелъ доступъ въ ариѳметическія руководства въ шестнадцатомъ вѣкѣ. Цѣлью его введенія было сдѣлать ариѳметику болѣе привлекательной. Въ семнадцатомъ вѣкѣ появилось также значительное число нѣмецкихъ книгъ, посвященныхъ исключительно этому предмету [1]).

---

[1]) *Wildermuth.*

Алгебра

Эпоха Возрожденія

Однимъ изъ наиболѣе значительныхъ шаговъ въ развитіи алгебры въ теченіе шестнадцатаго столѣтія было алгебраическое рѣшеніе уравненій третьей степени. Честь этого замѣчательнаго подвига принадлежитъ итальянцамъ [1]). Первое удачное изслѣдованіе кубическихъ уравненій произведено было итальянцемъ *Scipio Ferro* (ум. въ 1526 г.), профессоромъ математики въ Болоньѣ. Онъ рѣшалъ кубическія уравненія вида $x^3 + mx = n$, но о рѣшеніи его извѣстно только то, что онъ въ 1505 г. сообщилъ его своему ученику, по имени *Floridus*. Въ тѣ времена, какъ и въ послѣдующія столѣтія, существовалъ обычай, въ силу котораго учителя держали втайнѣ свои открытія и найденные ими новые методы изслѣдованія съ тѣмъ, чтобы ученики могли узнать ихъ только въ ихъ собственныхъ школахъ, или съ тѣмъ, чтобы обезпечить себѣ преимущество передъ другими, соперничавшими съ ними математиками, предлагая на разрѣшеніе недоступныя имъ задачи. Этотъ обычай породилъ много споровъ о пріоритетѣ различныхъ открытій. Одна изъ наиболѣе знаменитыхъ ссоръ этого рода возникла между Тартальей и Карданомъ въ связи съ открытіемъ уравненій третьей степени. Въ 1530 г. нѣкто Колла предложилъ Тартальѣ нѣсколько задачъ, одна изъ которыхъ приводила къ уравненію $x^3 + px^2 = q$. Тарталья нашелъ не-

---

[1]) Геометрическое рѣшеніе дано было уже раньше арабами.

совершенный способъ рѣшенія этого уравненія, объявилъ о томъ, что онъ рѣшилъ задачу, но самое рѣшеніе сохранилъ въ тайнѣ. Это заставило ученика Ферро, Флорида, объявить, съ своей стороны, что онъ умѣетъ рѣшать уравненія вида $x^3+mx=n$. Тарталья вызвалъ его на публичное состязаніе, которое должно было состояться 22-го февраля 1535 года. Тѣмъ временемъ Тарталья много работалъ, стараясь найти рѣшенія кубическихъ уравненій въ другихъ случаяхъ; ему удалось, наконецъ, за десять дней до назначеннаго срока, найти рѣшеніе въ случаѣ $x^3+mx=n$. На состязаніи каждый изъ участниковъ предложилъ по 30 задачъ. Рѣшившій наибольшее число задачъ въ теченіе пятидесяти дней долженъ былъ считаться побѣдителемъ. Тарталья рѣшилъ задачи своего соперника въ два часа; Floridus не могъ рѣшить ни одной задачи Тартальи. Съ тѣхъ поръ Тарталья сталъ прилагать всѣ свои усилія къ изученію уравненій третьей степени и въ 1541 году нашелъ общее рѣшеніе. Слава его стала распространяться по всей Италіи. Любопытно видѣть, насколько образованная публика интересовалась спорами подобнаго рода. Математикъ пользовался уваженіемъ, искусству его удивлялись. Тарталья отказался опубликовать свой методъ: онъ собирался написать большое сочиненіе по алгебрѣ, вѣнцомъ котораго должно было быть рѣшеніе уравненія третьей степени. Однако, миланскому ученому, по имени *Hieronimo Cardano* (1501 — 1576), удалось, послѣ многихъ просьбъ и самыхъ торжественныхъ обѣщаній сохранить тайну, узнать у Тартальи, въ чемъ состоитъ его методъ. Карданъ помѣстилъ затѣмъ этотъ методъ въ своемъ математическомъ сочиненіи *Ars Magna,* которое онъ тогда готовилъ, и которое появилось въ 1545 году. Это нарушеніе обѣщанія чуть не свело Тарталью съ ума. Онъ тотчасъ же написалъ исторію своего открытія, но, чтобы совершенно уничтожить Кардана, онъ вызвалъ его и ученика его Феррари на состязаніе. Тарталья отличился въ своемъ умѣніи рѣшать задачи, но не добился справедливаго къ себѣ отношенія. Результатомъ всего этого былъ тотъ фактъ, что человѣкъ, которому мы обязаны самымъ замѣчательнымъ открытіемъ въ области алгебры, сдѣланнымъ въ шестна-

дцатомъ столѣтіи, былъ забытъ, и открытіе его получило названіе Карданова рѣшенія. Карданъ былъ хорошимъ математикомъ, но связывать его имя съ рѣшеніемъ уравненій третьей степени — грубая историческая ошибка и большая несправедливость къ генію Тартальи.

Успѣхи, достигнутые въ рѣшеніи уравненій третьей степени, побудили математиковъ искать съ необычайнымъ усердіемъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Рѣшеніе уравненій четвертой степени нашелъ ученикъ Кардана *Lodovico Ferrari*. Карданъ доставилъ себѣ удовольствіе сдѣлать извѣстнымъ свѣту блестящее открытіе своего ученика въ *Ars Magna* въ 1545 г. Рѣшеніе Феррари приписываютъ иногда Бомбелли, который, однако, столь же мало могъ претендовать на него, какъ и Карданъ на рѣшеніе, носящее его имя. Въ теченіе послѣдующихъ трехъ вѣковъ алгебраисты дѣлали безчисленное множество попытокъ открыть алгебраическія рѣшенія уравненій выше четвертой степени. Вѣроятно, безъ большого преувеличенія можно сказать, что каждый честолюбивый молодой математикъ рано или поздно пробовалъ приложить свои силы въ этомъ направленіи. Наконецъ, возникло подозрѣніе, что задача эта, подобно древнимъ задачамъ о квадратурѣ круга, удвоеніи куба и трисекціи угла, не допускала рѣшенія того рода, какой пытались найти. Конечно, частные виды уравненій высшихъ степеней могли быть рѣшены въ достаточной мѣрѣ удовлетворительно. Такъ, напримѣръ, если всѣ коэффиціенты — цѣлыя числа, то съ помощью метода, подобнаго тѣмъ, которые были найдены Вьетой, Ньютономъ или Хорнеромъ, вычислитель всегда можетъ найти приближенныя численныя значенія корней. Если же мы допустимъ, что коэффиціенты суть буквы, выражающія какія-либо раціональныя количества, и что коэффиціенты эти не связаны никакой зависимостью, то задача наша принимаетъ болѣе грозный видъ. Наконецъ, нѣкоторымъ математикамъ пришло въ голову, что не худо было бы постараться доказать невозможность рѣшенія уравненій пятой степени алгебраически, т. е. съ помощью радикаловъ. Такъ, итальянскій врачъ *Paolo Ruffini* (1775 — 1822) напечаталъ доказательства невозможности рѣшенія ура-

вненій пятой степени [1]). Но его соотечественникъ Malfatti объявилъ эти доказательства неубѣдительными. Позднѣе блестящій молодой норвежскій математикъ *Niels Henrik Abel* (1802 — 1829) сумѣлъ строго доказать, что общее алгебраическое уравненіе пятой или болѣе высокой степени не можетъ быть разрѣшено при помощи радикаловъ [2]). Wantzel далъ другое доказательство той же теоремы, представляющее видоизмѣненіе Абелева [3]).

Возвращаясь ко времени Возрожденія, интересно замѣтить, что Карданъ въ своихъ сочиненіяхъ обращаетъ вниманіе и на отрицательные корни уравненія (называя ихъ *фиктивными*, тогда какъ положительные корни называются *дѣйствительными*); онъ открылъ также всѣ три корня въ нѣкоторыхъ численныхъ уравненіяхъ третьей степени (до этого времени никогда не находили болѣе двухъ корней ни въ одномъ уравненіи). Тогда какъ въ своихъ прежнихъ сочиненіяхъ Карданъ отвергаетъ мнимые корни, какъ невозможные, въ *Ars Magna* онъ проявляетъ большую смѣлость мысли, рѣшая задачу о раздѣленіи 10 на двѣ части, произведеніе которыхъ равно 40: онъ находитъ отвѣты $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$ и, перемножая ихъ, получаетъ: $25+15=40$ [4]). Здѣсь мы видимъ впервые рѣшительный шагъ впередъ по отношенію къ тому положенію, которое занимали въ алгебрѣ индусы. Дальнѣйшее развитіе взглядовъ на мнимыя количества мы находимъ также у *Рафаила Бомбелли* изъ Болоньи; въ 1572 г. онъ опубликовалъ алгебру, въ которой нашелъ,

---

[1]) См. *H. Burkhardt*, „Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini" въ Zeitschr. f. Math. и Physik, Suppl., 1892.

[2]) См. *Crelle's* Journal, I, 1826.

[3]) Доказательство Вантцеля, переведенное изъ книги *Serret*, Cours d'Algèbre Supérieure было напечатано въ журналѣ Analyst (изд. *Joel E. Hendricks* изъ Des Moines), Vol. IV, p. 65. Уравненіе пятой степени не можетъ быть разрѣшено въ радикалахъ, но трансцендентное рѣшеніе его, заключающее эллиптическіе интегралы, было дано Эрмитомъ (въ Comptes Rendus, 1858, 1865, 1866) и Кронекеромъ въ 1858 г. Переводъ рѣшенія съ помощью эллиптическихъ интеграловъ, заимствованный изъ „Теоріи эллиптическихъ функцій" Бріо и Букэ, былъ также напечатанъ въ журналѣ Analyst, Vol. V, p. 161.

[4]) *Cantor*, II, 467.

что въ такъ называемомъ неприводимомъ случаѣ уравненія третьей степени всѣ три корня его вещественны *).

Поучительно дать нѣсколько примѣровъ алгебраическихъ обозначеній, принятыхъ въ Италіи въ тѣ времена [1]).

Pacioli: ℞ V 40 $\overline{m}$ ℞ 320, $\sqrt{40-\sqrt{320}}$.

Cardano: Cubus $\overline{p}$ 6 rebus æqualis 20, $x^3+6x=20$,

℞. *v.* cu. ℞. 108 $\tilde{p}$. 10 | $\overline{m}$ ℞. *v.* cu. ℞. 108 $\overline{m}$ 10,

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}.$$

Италіанцы имѣли обыкновеніе называть неизвѣстное количество „вещью“, *cosa*. Въ Германіи это слово было принято еще во времена Іоганна Видманна, какъ названіе алгебры: какъ выражается онъ, „Regel Algobre oder Cosse“. Въ Англіи это новое названіе алгебры, *коссическое* искусство (*cossic* art), дало поводъ автору перваго англійскаго сочиненія, посвященнаго этой наукѣ, Роберту Рекорду, придумать для своей книги заглавіе, заключающее въ себѣ игру словъ: *Whetstone of Witte* — *cos ingenii* — оселокъ ума. Нѣмцы значительно усовершенствовали алгебраическія обозначенія. Знаки + и —, упомянутые нами въ исторіи ариѳметики, были, конечно, введены и въ алгебру, но они вошли во всеобщее употребленіе лишь во времена Вьеты. „Очень странно“, говоритъ Халламъ, „что нововведенія чрезвычайно удобныя, и открытіе которыхъ казалось доступно было бы даже уму сельскаго учителя, не обращали на себя вниманія людей съ необычайнымъ остроуміемъ, такихъ, какъ Тарталья, Карданъ или Феррари; странность эта едва ли уменьшается тѣмъ обстоятельствомъ, что благодаря своему остроумію они могли обходиться безъ помощи тѣхъ удобствъ, въ которыхъ, какъ мы полагаемъ, состоитъ главная польза алгебраическихъ обозначеній“. Другой важный символъ,

*) См. приложеніе въ концѣ книги: „Теорія мнимыхъ величинъ у Бомбелли“. *Прим. ред.*

[1]) *Cantor,* II, 293; Matthiessen, p. 368; значеніе *x,* данное въ приведенномъ нами примѣрѣ, есть рѣшеніе уравненія третьей степени, записаннаго въ предыдущей строкѣ. „*V*“ или „*v*“ есть знакъ соединенія, или общаго корня.

введенный нѣмцами,— знакъ радикала. Въ рукописи, появившейся въ пятнадцатомъ столѣтіи, точка, поставленная передъ числомъ, означаетъ извлеченіе корня изъ этого числа. *Christoff Rudolff,* написавшій первое руководство по алгебрѣ на нѣмецкомъ языкѣ (напечатанное въ 1525 г.), замѣчаетъ, что „radix quadrata обозначается въ его алгориѳмѣ для краткости знакомъ $\surd$, напримѣръ, $\surd 4$“. Здѣсь точка, найденная въ рукописи, превратилась въ символъ, очень похожій на тотъ, которымъ пользуемся мы. У Кристофа Рудольфа VVV и VV означаютъ кубическій корень и корень четвертой степени. Символомъ $\surd$ пользовался и *Michael Stifel* (1486? — 1567), который въ 1553 г. выпустилъ второе изданіе Рудольфова *Косса,* содержащее правила рѣшенія кубическихъ уравненій, заимствованныя изъ сочиненія Кардана. Стифель считается величайшимъ нѣмецкимъ алгебраистомъ шестнадцатаго столѣтія. Онъ родился въ Эсслингенѣ и воспитывался тамъ же въ монастырѣ, а затѣмъ сдѣлался протестантскимъ пасторомъ. Изученіе значенія таинственныхъ чиселъ въ Апокалипсисѣ и въ книгѣ пророка Даніила привело его къ занятіямъ математикой. Онъ изучилъ сочиненія нѣмецкихъ и италіанскихъ математиковъ и въ 1544 г. опубликовалъ латинскій трактатъ, *Arithmetica Integra,* посвященный изложенію ариѳметики и алгебры. Въ этой книгѣ онъ замѣтилъ выгоды, проистекающія изъ сопоставленія членовъ геометрическаго и ариѳметическаго рядовъ; при этомъ онъ говоритъ, что можно было бы написать цѣлую книгу объ удивительныхъ свойствахъ чиселъ, зависящихъ отъ этой связи. Здѣсь онъ близко подходитъ къ идеѣ *логариѳма.* Онъ даетъ биноміальные коэффиціенты, получаемые при разложеніи $(a+b)$ въ степени ниже 18-ой, и пользуется этими коэффиціентами для извлеченія корней. Нѣмецкія обозначенія можно иллюстрировать слѣдующими примѣрами:

Regiomontanus: 16 census et 2000 æquales 680 rebus,

$$16x^2 + 2000 = 680\,x.$$

Stifel: $\surd\mathfrak{z}\cdot\surd\mathfrak{z}\,20-4-\surd\mathfrak{ß}\,8$, $\qquad \sqrt{\sqrt{20}-4-\sqrt[5]{8}}$ *).

*) Ср. приложеніе въ концѣ книги „Алгебраическія обозначенія“.

Величайшимъ французскимъ алгебраистомъ шестнадцатаго столѣтія былъ *Franciscus Vieta* (François Viete, 1540—1603). Онъ былъ уроженцемъ Пуату и умеръ въ Парижѣ. По образованію онъ былъ юристомъ и по достиженіи зрѣлаго возраста поступилъ на службу и служилъ при Генрихѣ III и Генрихѣ IV. Занятія математикой были для него отдыхомъ. Подобно Неперу онъ не считалъ себя математикомъ по профессіи. Во время войны съ Испаніей онъ оказалъ услугу Генриху IV, разобравъ перехваченныя письма, написанныя шифромъ, содержавшимъ болѣе 500 знаковъ различнаго значенія и адресованныя испанскимъ дворомъ испанскому губернатору въ Нидерландахъ. Испанцы приписали волшебству открытіе ключа къ этому шифру. Вьета, какъ говорятъ, напечаталъ всѣ свои сочиненія на свой счетъ и роздалъ ихъ своимъ друзьямъ въ подарокъ. Его книга *In Artem Analyticam Isagoge,* Tours, 1591,—самое раннее сочиненіе, содержащее символическое изложеніе алгебры. Онъ не только усовершенствовалъ современныя ему алгебру и тригонометрію, но и прилагалъ алгебру къ геометріи болѣе широко и болѣе систематично, чѣмъ это дѣлали до него. Онъ далъ также тригонометрическое рѣшеніе Карданова неприводимаго случая уравненій третьей степени.

При рѣшеніи уравненій Вьета постоянно прилагалъ принципъ *приведенія* и этимъ достигъ необычайнаго для того времени однообразія въ изложеніи. Онъ приводитъ полныя квадратныя уравненія къ неполнымъ посредствомъ соотвѣтственнымъ образомъ выбранной подстановки для уничтоженія члена, содержащаго x. Подобнымъ же образомъ поступаетъ онъ въ случаяхъ уравненій третьей и четвертой степени. Вьетѣ извѣстны были въ нѣкоторой мѣрѣ соотношенія, существующія между коэффиціентами и корнями уравненія. Къ сожалѣнію, онъ отвергалъ всѣ корни кромѣ положительныхъ и потому не могъ вполнѣ усмотрѣть всѣхъ этихъ соотношеній. Онъ ближе всего подошелъ къ познанію этихъ фактовъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ утверждаетъ, что уравненіе $x^3-(u+v+w)x^2+(uv+vw+wu)x-uvw=0$ имѣетъ три корня u, v, w. Для уравненій третьей степени

это утвержденіе представляетъ вполнѣ свойство корней, если только допустить, что *u, v, w* изображаютъ какія угодно числа. Но Вьета имѣлъ обыкновеніе приписывать буквамъ только положительныя значенія, благодаря чему приведенное мѣсто выражаетъ меньше, чѣмъ, казалось бы съ перваго взгляда, оно должно было бы выражать [1]). Еще въ 1558 г. *Jacques Peletier* (1517—1582), французскій ученый, составитель руководствъ по алгебрѣ и геометріи, замѣтилъ, что корень уравненія является дѣлителемъ послѣдняго члена. Болѣе широко смотрѣлъ на этотъ вопросъ *Albert Girard* (1590 — 1633), извѣстный фламандскій математикъ, который въ 1629 году выпустилъ въ свѣтъ свое сочиненіе *Invention nouvelle en l'algèbre*. Онъ первый оцѣнилъ пользу отрицательныхъ корней для рѣшенія геометрическихъ задачъ. Онъ говорилъ о мнимыхъ количествахъ и дошелъ, посредствомъ наведенія, до предложенія, въ силу котораго каждое уравненіе имѣетъ столько корней, сколько единицъ въ показателѣ его степени. Онъ первый показалъ, какъ суммы произведеній корней выражаются посредствомъ коэффиціентовъ. Сумму корней, равную коэффиціенту второго члена съ обратнымъ знакомъ, онъ назвалъ *première faction*. Сумму произведеній корней, взятыхъ по два, равную коэффиціенту третьяго члена, онъ назвалъ *deuxième faction*, и т. д. Для случая уравненія $x^4-4x+3=0$ онъ даетъ корни $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1+\sqrt{-2}$, $x_4=-1-\sqrt{-2}$ и говоритъ затѣмъ, что мнимые корни полезны для показанія общности закона образованія коэффиціентовъ изъ корней [2]). Подобныя же изслѣдованія по теоріи уравненій были произведены въ Англіи, независимо отъ Жирара, *Томасомъ Харріотомъ* (*Thomas Harriot*, 1560 — 1621). Его посмертное сочиненіе *Artis Analyticæ Praxis*, 1631, было написано задолго до *Invention* Жирара, но было опубликовано послѣ этой книги. Харріотъ открылъ соотношенія между корнями и коэффиціентами уравненія въ его простѣйшей формѣ. Это открытіе было сдѣлано, такимъ образомъ, почти одновременно Хар-

---

[1]) *Hankel*, p. 379.
[2]) *Cantor*, II, 718.

ріотомъ въ Англіи, Вьетой и Жираромъ на континентѣ. Харріотъ первый разлагалъ уравненія на ихъ простыхъ множителей, но, такъ какъ онъ не признавалъ мнимыхъ и даже отрицательныхъ корней, то и не могъ доказать возможности такого разложенія для всякаго уравненія.

Харріотъ былъ первымъ англійскимъ алгебраистомъ. Получивъ ученую степень въ Оксфордѣ, онъ поселился у сэра Вальтера Ралея въ качествѣ преподавателя математики [1]). Въ 1585 г. Ралей послалъ его въ Виргинію землемѣромъ при экспедиціи сэра Ричарда Гренвилля. По возвращеніи изъ этой экспедиціи, въ слѣдующемъ году, онъ опубликовалъ „Краткій и правдивый отчетъ о вновь найденной землѣ Виргиніи (A Brief and True Report of the New-found Land of Virginia)“, обратившій на себя большое вниманіе и переведенный на латинскій языкъ. Среди математическихъ инструментовъ, возбудившихъ удивленіе индѣйцевъ, Харріотъ упоминаетъ „о подзорной трубѣ, позволявшей показывать много странныхъ видовъ (a perspective glass whereby was showed many strange sights)“ [2]). Около того же времени Генрихъ графъ Нортумберландскій обратилъ вниманіе на Харріота. Восхищаясь его воспитанностью и ученостью, онъ назначилъ Харріоту пожизненную пенсію въ 300 ф. стерлинговъ ежегодно. Въ 1606 году графъ былъ заключенъ въ Тауеръ, но три его друга-математика, Harriot, Walter Warner и Thomas Hughes, „три волхва графа Нортумберландскаго“, часто встрѣчались тамъ, и графъ угощалъ ихъ хорошими обѣдами. Харріотъ былъ человѣкъ болѣзненный, чѣмъ объясняется, можетъ быть, то обстоятельство, что онъ не могъ закончить и опубликовать своихъ открытій.

Мы приведемъ теперь вкратцѣ взгляды ученыхъ шестнадцатаго столѣтія и первой половины семнадцатаго на отрицательныя и мнимыя количества. Кардановъ „чистый минусъ“ и его взгляды на мнимыя количества были пере-

---

[1]) Dictionary of National Biography.

[2]) **Харріотъ былъ не только математикомъ, но и астрономомъ; онъ „приложилъ телескопъ къ изслѣдованію неба почти одновременно съ Галилеемъ“. Телескопъ его увеличивалъ до 50 разъ. См. Dic. of Nat. Biography.**

довыми для того времени. До самаго начала семнадцатаго столѣтія математики имѣли дѣло исключительно съ положительными количествами. Пачіоли говоритъ, что „минусъ на минусъ даетъ плюсъ“, но прилагаетъ это правило только къ образованію произведенія $(a-b)(c-d)$. Въ его сочиненіи нѣтъ чисто отрицательныхъ количествъ. Нѣмецкій „коссистъ“ Рудольфъ признаетъ только положительныя числа и положительные корни, несмотря на то, что онъ пользуется знаками $+$ и $-$. Послѣдователь его Стифель говоритъ, что отрицательныя числа „меньше, чѣмъ ничто“, и называетъ ихъ также „нелѣпыми числами“, возникающими отъ вычитанія изъ нуля дѣйствительныхъ чиселъ, стоящихъ выше нуля [1]). Харріотъ первый ставитъ иногда отдѣльный отрицательный членъ въ одной изъ частей уравненія. Віета признаетъ только положительныя числа, у Жирара же были передовые взгляды, какъ на отрицательныя, такъ и на мнимыя числа. До семнадцатаго столѣтія большинство великихъ европейскихъ алгебраистовъ не поднялись еще до высоты взглядовъ, встрѣчаемыхъ нами у индусовъ. Только о немногихъ изъ нихъ можно сказать, что они, подобно индусамъ, усматривали отрицательные корни; быть можетъ, всѣ европейцы, подобно индусамъ, не одобряли введенія отрицательныхъ чиселъ. Полное объясненіе и построеніе отрицательныхъ количествъ и систематическое употребленіе ихъ начинается съ *Рената Декарта* (René Descartes, 1596—1650). Но и послѣ него появляются еще отъ времени до времени неправильные взгляды на отрицательныя числа. Въ сущности, только со средины девятнадцатаго вѣка ученіе объ отрицательныхъ числахъ стало правильно объясняться въ школьныхъ руководствахъ по алгебрѣ. Естественно возникаетъ вопросъ, почему обобщеніе понятія о числѣ, со включеніемъ отрицательныхъ чиселъ, представлялось такимъ труднымъ шагомъ? Повидимому, отвѣтъ заключается въ слѣдующемъ: отрицательныя числа представлялись „нелѣпыми“ или „воображаемыми“, пока математики не дошли до *зрительнаго, или графическаго, изображенія ихъ*. Индусы скоро увидѣли, что объясненіе поло-

---

[1]) *Cantor,* II, 406.

жительныхъ и отрицательныхъ чиселъ можно найти въ „противоположности направленій". Понятія объ „имуществахъ" и „долгахъ" давали имъ другое объясненіе природы этихъ чиселъ. Европейцы овладѣли этими идеями вполнѣ только во времена Жирара и Декарта. Стифелю принадлежитъ нелѣпое выраженіе, что отрицательныя числа „меньше, чѣмъ ничто". Потребовалось около 300 лѣтъ, чтобы исключить эту безсмысленную фразу изъ математическаго языка.

Исторія подчеркиваетъ важность графическаго представленія отрицательныхъ чиселъ для преподаванія алгебры. Если опустить всѣ иллюстраціи отрицательныхъ чиселъ линіями или посредствомъ термометра, то числа эти покажутся современнымъ учащимся настолько же нелѣпыми, насколько они казались таковыми старымъ алгебраистамъ.

Въ развитіи символической алгебры большія заслуги принадлежатъ Вьетѣ. Введенный имъ обычай обозначать общія, или неопредѣленныя, выраженія буквами азбуки составилъ эпоху въ исторіи нашей науки. Конечно, Стифель, Карданъ и другіе пользовались буквами до него, но Вьета первый сдѣлалъ ихъ существенной принадлежностью алгебры. Новой символической алгебрѣ онъ далъ названіе *logistica speciosa* въ противоположность старой алгебрѣ, *logistica numerosa*. Въ его обозначеніи формула $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ писалось такъ: „a cubus $+\,b$ in a quadr. $3+a$ in b quadr. $3+b$ cubo æqualia $\overline{a+b}$ cubo". Связку, или черту, онъ ввелъ, какъ знакъ соединенія. Скобки встрѣчаются впервые у Жирара *). Въ *численныхъ* уравненіяхъ неизвѣстное количество обозначалось черезъ N, квадратъ его черезъ Q, а кубъ черезъ C. Напримѣръ [1]):

Vieta:	1 $C-8\,Q+16\,N$ æqu. 40,	$x^3-8x^2+16x=40.$
Vieta:	A cubus $+\,B$ plano 3 in A, æquari Z solido 2,	$x^3+3bx=2c.$
Girard:	1 ③ x 13 ① + 12	$x^3=13x+12.$
Descartes:	$x^{3*}+px+q\infty 0,$	$x^3+px+q=0.$

*) См. приложеніе въ концѣ книги — „Алгебраическія обозначенія". *Прим. ред.*

[1]) *Matthiessen*, pp. 270, 371.

Нашъ знакъ равенства = принадлежитъ Рекорду *). Харріотъ сталъ употреблять малыя буквы азбуки вмѣсто большихъ, употреблявшихся Вьетой. Харріотъ пишетъ: $a^3 - 3ab^2 = 2c^3$ слѣдующимъ образомъ: $aaa - 3bba = 2ccc$. Онъ же ввелъ знаки неравенства $>$ и $<$. Вильямъ Оутредъ (1574—1660) ввелъ $\times$, какъ знакъ умноженія и $::$ для обозначенія пропорцій. Въ своей книгѣ *Clavis* (1631), пользовавшейся большой популярностью въ Англіи, онъ пишетъ A^{10} такъ: *Aqqcc*, $120\,A^7E^3$ такъ: 120 *Aqqc Ec*.

Послѣднія три столѣтія.

Первые шаги къ построенію нашей современной теоріи показателей и къ нашему обозначенію ихъ были сдѣланы *Симономъ Стевиномъ* (*Simon Stevin*, 1548—1620) изъ Брюгге въ Бельгіи. Попытки, сдѣланныя раньше въ этомъ направленіи Орэмомъ, остались совершенно незамѣченными, но нововведенія Стевина, хотя и не обратили на себя сначала достаточнаго вниманія, сдѣлались, однако, потомъ навсегда общимъ достояніемъ всѣхъ математиковъ. Его обозначеніе показателей возникло въ связи съ введеннымъ имъ же обозначеніемъ десятичныхъ дробей. Онъ обозначаетъ неизвѣстное количество черезъ ○ и ставитъ внутри этого кружка показателя степени. Такъ ①, ②, ③ обозначаютъ x, x^2, x^3. Онъ распространяетъ свое обозначеніе и на дробные показатели, (½), (⅓), (⅔) обозначаютъ $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$. Онъ пишетъ $3xyz^2$ слѣдующимъ образомъ: 3 ① M*sec* ① M*ter* ②, гдѣ M есть знакъ умноженія, *sec* означаетъ второе, а *ter* третье неизвѣстное количество. Знакъ ○ для обозначенія x былъ принятъ Жираромъ. Большая независимость мысли у Стевина выражается осужденіемъ такихъ терминовъ, какъ „сурсолидъ“ или чиселъ „нелѣпыхъ“, „ирраціональныхъ“, „неправильныхъ“, „глухихъ“. Онъ показываетъ, что всѣ числа равнымъ образомъ служатъ соотвѣтствующими выраженіями какой-нибудь длины или какой-нибудь степени одного и того же

---

*) Ср. приложеніе въ концѣ книги: „Знакъ равенства у Рекорда“. *Прим. ред.*

корня. Онъ отвергаетъ также всевозможныя составныя выраженія, какъ „квадрато-квадратъ“, „кубо-квадратъ“, и предлагаетъ называть соотвѣтствующія количества, по ихъ показателямъ, „четвертой“ и „пятой“ степенями. Стевиновъ символъ неизвѣстнаго количества не былъ принятъ, но принципъ обозначенія показателей пережилъ этотъ символъ. Современная система обозначеній приняла законченный видъ у Декарта. Въ своей *Геометріи* (1637) онъ употребляетъ послѣднія буквы алфавита, на первомъ мѣстѣ x, а затѣмъ и буквы y, z, для обозначенія неизвѣстныхъ количествъ, тогда какъ первыя буквы алфавита обозначаютъ извѣстныя количества. Наше обозначеніе показателей, a^4, встрѣчается у Декарта; онъ, однако, не пользуется общими показателями, какъ a^n; не употребляетъ онъ также ни отрицательныхъ, ни дробныхъ показателей. Въ этомъ отношеніи онъ не поднялся до высоты идей Стевина. Онъ не снабжаетъ радикаловъ показателями, но въ случаѣ, напримѣръ, извлеченія кубическаго корня, онъ ставитъ букву C, такъ $\sqrt{C + \frac{1}{2} q} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$ [1]).

Изъ старыхъ знаковъ извлеченія корня до нашего времени дошли два, нѣмецкій знакъ радикала и Стевиновы дробные показатели. Въ наше время ученики должны учить алгориѳмы для обозначеній обоего рода; они знакомятся со смысломъ выраженія $\sqrt[3]{a^2}$ и равносильнаго ему $a^{\frac{2}{3}}$. Объ этомъ слѣдуетъ сильно сожалѣть. Дѣйствія надъ дробными показателями не всегда оказываются легкими, а правила, относящіяся къ радикаламъ, считаются „трудными“. Необходимость учить и тѣ и другіе задерживаетъ только напрасно успѣхи учениковъ. Изъ двухъ родовъ обозначеній обозначеніе показателей неизмѣримо выше. Радикалы встрѣчаются только при извлеченіи корней [2]). Показатели, съ другой

---

[1]) *Cantor*, II, 723, 724.

[2]) **Въ связи съ представленіемъ мнимаго количества $\sqrt{-1}$ обозначеніе съ помощью радикала предосудительно, потому что оно приводитъ учащихся и даже авторовъ руководствъ къ тому замѣчанію, что правила производства дѣйствій, вѣрныя для вещественныхъ количествъ, не всегда годятся для мнимыхъ, такъ какъ произведеніе $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ не равно $\sqrt{+1}$. Что трудность эта связана только съ**

стороны, прилагаются какъ къ возвышенію въ степени, такъ и къ извлеченію корней; съ ихъ помощью всѣ дѣйствія и упрощенія производятся сравнительно легко. Какъ много мы выиграли бы, если бы мы могли въ этомъ случаѣ порвать цѣпи, связывающія насъ съ прошлымъ!

Декартъ обогатилъ теорію уравненій теоремой, извѣстной подъ названіемъ „правила знаковъ". Съ помощью этого предложенія опредѣляется число положительныхъ и отрицательныхъ корней уравненія: данное уравненіе можетъ имѣть столько + корней, сколько въ немъ перемѣнъ знаковъ, и столько — корней, сколько есть постоянствъ. Валлисъ обвинялъ Декарта въ томъ, что онъ воспользовался, не говоря объ этомъ, Харріотовой теоріей уравненій,— въ частности, его способомъ образованія уравненій; однако, нѣтъ, повидимому, никакихъ основаній взводить на Декарта это обвиненіе. Валлисъ утверждалъ, кромѣ того, что Декартъ не замѣтилъ непримѣнимости своего правила въ случаѣ существованія мнимыхъ корней, но Декартъ вѣдь и не говоритъ, что уравненіе *всегда имѣетъ* столько корней, но что оно ихъ *можетъ имѣть*. Правда, что Декартъ не разсматриваетъ прямо случая мнимыхъ корней, но дальнѣйшія разсужденія въ его *Геометріи* показываютъ съ достаточной ясностью его умѣніе рѣшать вопросы, относящіеся къ такимъ случаямъ.

Англійскій ученый *John Wallis* (1616—1703) былъ очень оригинальнымъ математикомъ. По воспитанію своему онъ готовился къ духовному званію; по окончаніи образованія въ Кэмбриджѣ, онъ былъ рукоположенъ, но въ 1649 году былъ назначенъ профессоромъ геометріи на кафедру Савиля въ Оксфордѣ (Savilian professor of geometry). Онъ пошелъ дальше Кеплера въ распространеніи „закона непрерывности", прилагая его къ алгебрѣ, въ то время какъ Дезаргъ прилагалъ его къ геометріи. Руководясь этимъ закономъ, Валлисъ сталъ разсматривать знаменатели дробей, какъ степени

обозначеніемъ, видно изъ того, что она исчезаетъ, когда мы обозначаемъ мнимую единицу черезъ i. Тогда $i \cdot i = i^2$, что, по опредѣленію, равно — 1.

съ отрицательными показателями. Продолженіе нисходящей геометрической прогрессіи x^2, x^1, x^0 даетъ x^{-1}, x^{-2} и т. д.— то же, что $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ и т. д. Показатели геометрическаго ряда составляютъ ариѳметическую прогрессію 2, 1, 0, —1, —2. Онъ пользовался также дробными показателями, которые были изобрѣтены задолго до этого времени, но не вошли во всеобщее употребленіе. Ему же принадлежитъ символъ безконечности ∞. Въ 1685 г. Валлисъ опубликовалъ *Алгебру*, которая долго служила образцовой настольной книгой по этому предмету. Въ ней излагается исторія, теорія и практика ариѳметики и алгебры. На историческую часть нельзя полагаться, и поэтому она не имѣетъ никакого значенія, но въ другихъ отношеніяхъ книга эта является образцовымъ произведеніемъ и удивительно богата по своему содержанію.

Изученіе нѣкоторыхъ результатовъ, полученныхъ Валлисомъ относительно квадратуры кривыхъ, привело Ньютона къ открытію Биноміальной Теоремы, сдѣланному около 1665 г. и изложенному въ письмѣ, написанномъ Ньютономъ Ольденбургу 13 іюня 1676 г.[1]. Ньютоновъ выводъ даетъ разложеніе $(a+b)^n$, какъ для положительныхъ, такъ и для отрицательныхъ цѣлыхъ или дробныхъ значеній n, въ рядъ, который безконеченъ во всѣхъ случаяхъ за исключеніемъ того, когда n цѣлое положительное число. Ньютонъ не далъ правильнаго доказательства этой теоремы, но далъ повѣрку ея посредствомъ дѣйствительнаго умноженія. Для случая цѣлыхъ положительныхъ показателей теорема эта была доказана Яковомъ Бернулли[2] (1654 — 1705) съ помощью теоріи сочетаній. Доказательство ея для случая отрицательныхъ и дробныхъ показателей было дано Леонардомъ Эйлеромъ (1707 — 1783). Доказательство это грѣшитъ тѣмъ, что не разсматриваетъ сходимости ряда; тѣмъ не менѣе оно воспроизводилось въ элементарныхъ руководствахъ по

---

[1]) Въ *С. Н. М.*, pp. 195, 196, объяснено, какимъ образомъ Биноміальная Теорема была выведена, какъ слѣдствіе результатовъ, полученныхъ Валлисомъ.

[2]) Ars Conjectandi, 1713, p. 89.

алгебрѣ даже и въ новѣйшія времена [1]). Строгое общее доказательство Биноміальной Теоремы, обнимающее даже случаи несоизмѣримыхъ и мнимыхъ показателей, дано было Нильсомъ Генрикомъ Абелемъ [2]). Такимъ образомъ, оказывается, что въ теченіе болѣе полутора столѣтія эта основная теорема излагалась безъ надлежащаго доказательства [3]).

Сэръ Исаакъ Ньютонъ (*Sir Isaac Newton*, 1642 — 1727) — вѣроятно, величайшій математическій геній всѣхъ временъ. Нѣкоторое представленіе о силѣ его созерцательныхъ способностей можетъ дать тотъ фактъ, что онъ въ юности своей считалъ теоремы древней геометріи самоочевидными истинами, и что безъ всякой предварительной подготовки онъ изучилъ Декартову *Геометрію*. Онъ впослѣдствіи считалъ ошибочнымъ такое пренебреженіе къ элементарной геометріи и однажды выразилъ сожалѣніе о томъ, „что онъ сталъ изучать творенія Декарта и другихъ писателей-алге-

---

[1]) Исторію безконечныхъ рядовъ см. въ сочиненіи *Reiff*, Geschichte der Unendlichen Reihen, Tübingen, 1889; см. также *Cantor*, III, 53 — 94; *C. H. M.*, pp. 334 — 339; Teach. and Hist. of Math. in the U. S., pp. 361 — 376.

[2]) См. *Crelle*, I, 1827 или Œuvres complètes de *N. H. Abel*, Christiania, 1839, I, 66 et suiv.*).

*) O. C. de *N. H. Abel*, nouv. edition, t. I, Christ., 1881, pp. 219 suiv. Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$ Нѣмецкій переводъ изданъ въ собраніи „Ostwald's Klassiker", Nr. 71: Untersuchungen üb. die Reihe u. s. w. von *N. H. Abel*, herausgeg. v. *A. Wangerin*, Lpzg. 1895 (съ примѣч. издателя). *Прим. ред.*

[3]) Слѣдуетъ замѣтить, что зачатки Теоремы о Биномѣ для цѣлыхъ положительныхъ показателей встрѣчаются очень рано. Индусы и арабы пользовались разложеніями $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$ при извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней. Вьета зналъ разложеніе $(a+b)^4$. Но эти результаты были найдены посредствомъ дѣйствительнаго умноженія, а не съ помощью какого-нибудь закона разложенія. Стифель далъ коэффиціенты для первыхъ 18 степеней; подобные же результаты были достигнуты Паскалемъ въ его „ариѳметическомъ треугольникѣ" (см. *Cantor*, II, 685, 686). Пачіоли, Стевинъ, Бриггсъ и другіе тоже обладали нѣкоторыми знаніями, изъ которыхъ, казалось бы, при нѣкоторомъ вниманіи можно было бы вывести Теорему о Биномѣ; такъ слѣдовало бы полагать, „если бы мы не знали, что такія простыя соотношенія открываются съ трудомъ" (Де Морганъ).

браистовъ раньше, чѣмъ разсмотрѣть *Начала* Евклида съ тѣмъ вниманіемъ, котораго заслуживаетъ столь выдающійся авторъ". Въ теченіе первыхъ девяти лѣтъ своего профессорства въ Кэмбриджѣ онъ читалъ лекціи по алгебрѣ. Болѣе тридцати лѣтъ спустя, въ 1707 году, онѣ были опубликованы М-рмъ Вистономъ (Mr. Whiston) подъ заглавіемъ *Arithmetica Universalis*. Онѣ содержатъ новыя и важныя изысканія по теоріи уравненій. Теорема Ньютона о суммахъ степеней корней хорошо извѣстна. Вотъ образчикъ его обозначеній:

$$a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc.$$

Въ другихъ своихъ сочиненіяхъ онъ ввелъ обозначенія съ буквенными указателями. *Arithmetica Universalis* содержитъ также большое число задачъ. Мы приводимъ одну изъ нихъ (No. 45): „Камень падаетъ въ колодезь; опредѣлить глубину колодца по звуку, происходящему при ударѣ камня о дно" *). Онъ заканчиваетъ свои задачи замѣчаніемъ, показывающимъ, что методы преподаванія обращали на себя, до нѣкоторой степени, его вниманіе: „Я показалъ выше рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ. Ибо при изученіи наукъ примѣры полезнѣе правилъ" **) [1]).

*) Lapide in puteum decidente, ex sono lapidis, fundum percutientis, altitudinem putei cognoscere.— Arithm. Univ., prob. XLV, p. 194.— Рѣшеніе этой задачи приводитъ къ уравненію $x^2 - \frac{2adt + ab^2}{d^2}x + \frac{a^2t^2}{d^2} = 0$, гдѣ x — глубина колодца; камень проходитъ пространство a во время b, а звукъ то же пространство — во время d; t — время „a lapide demisso ad sonum reditum". *Прим. ред.*

**) Arithm. Univ., p. 234: „In scientiis enim addiscendis prosunt exempla magis quam praecepta". *Прим. ред.*

[1]) Тѣло Ньютона было погребено въ Вестминстерскомъ аббатствѣ, гдѣ въ 1731 г. былъ ему воздвигнутъ великолѣпный памятникъ. Въ энциклопедическихъ словаряхъ часто говорится, что на Ньютоновой гробницѣ была вырѣзана Формула Бинома, что, должно быть, невѣрно и, именно, по слѣдующимъ соображеніямъ: (1) Dr. Bradley, деканъ Вестминстерскій и нѣкоторые знакомые намъ математики, посѣтившіе аббатство и взбиравшіеся на монументъ, свидѣтельствуютъ, что въ настоящее время на гробницѣ не видно изображенія упомянутой теоремы; между тѣмъ, можно еще ясно прочесть всѣ сдѣланныя на ней

Наиболѣе замѣчательными изслѣдователями, занимавшимися рѣшеніемъ численныхъ уравненій, являются Вьета, Ньютонъ, Лагранжъ, Жозефъ Фурье, Хорнеръ. Еще до Вьеты Карданъ прилагалъ къ кубическимъ уравненіямъ индусское правило „ложнаго положенія", но методъ его былъ грубъ. Вьета, однако, придумалъ процессъ, который по принципу своему совпадаетъ съ позднѣйшими методами Ньютона и Хорнера [1]). Позднѣйшія измѣненія касались расположенія работы съ цѣлью сдѣлать вычисленія корня болѣе легкимъ и пріобрѣсти больше увѣренности въ точности полученнаго результата. При преподаваніи алгебры обыкновенно излагается методъ Хорнера. *William George Horner* (1786 — 1837) изъ Бата, сынъ веслеянскаго мето-

---

латинскія надписи. (2) Ни одинъ изъ біографовъ Ньютона и ни одна изъ старыхъ книгъ — путеводителей по Вестминстерскому аббатству — не упоминаютъ о Биноміальной Формулѣ въ своихъ (часто очень полныхъ) описаніяхъ Ньютоновой гробницы. Однако, нѣкоторые изъ нихъ говорятъ, что на небольшомъ свиткѣ, который держатъ двое крылатыхъ юношей передъ полулежащей фигурой Ньютона, есть математическіе знаки. См. Neale's Guide. Brewster въ своей книгѣ Life of Sir Isaac Newton (Жизнеописаніе сэра И. Ньютона), 1631, говоритъ, что тамъ изображенъ „сходящійся рядъ", „converging series", но въ настоящее время ничего подобнаго не видно. Брустеръ, конечно, сказалъ бы „Binomial Theorem", а не „converging series", если бы теорема дѣйствительно была тамъ. Формула Бинома, къ тому же, не всегда сходится. (3) Важно замѣтить, что какая бы надпись ни была вырѣзана на свиткѣ, никто не могъ бы видѣть и прочесть ее, не ставши на стулъ или не приставивъ лѣстницы. Поэтому надпись на свиткѣ не могла быть замѣчена посѣтителями, посвящавшими памятнику лишь мимолетное вниманіе. Лицами, осматривавшими все тщательно, могли быть скорѣе всего составители путеводителей и біографы — тѣ самые, которые умалчиваютъ о Биноміальной Теоремѣ. Съ другой — такой писатель, какъ E. Stone, составитель Новаго Математическаго Словаря (New Mathematical Dictionary, London, 1743) скорѣе всего могъ утверждать, что теорема „изображена на памятникѣ", лишь по наслышкѣ. (4) У насъ есть положительное свидѣтельство такого точнаго и добросовѣстнаго писателя, какъ Августъ де Морганъ, что на памятникѣ *нѣтъ* надписи, содержащей теорему о биномѣ. Къ сожалѣнію, мы нигдѣ не могли найти основаній, на которыхъ онъ это утверждаетъ. См. его статью „Newton" въ Penny или English Cyclopaedia. См. также нашу статью въ Bull. of the Am. Math. Soc., I, 1894, pp. 52—54.

[1]) См. *Hankel*, p. 369; *C. H. M.*, p. 147.

дистскаго пастора, воспитывался въ Кингсвудской школѣ около Бристоля и шестнадцати лѣтъ отъ роду вступилъ на преподавательское поприще въ качествѣ младшаго учителя (assistant master). Его методъ рѣшенія уравненій былъ прочтенъ передъ Королевскимъ обществомъ 1 іюля 1819 г. и опубликованъ въ Philosophical Transactions за тотъ же годъ [1]). Де Морганъ, который былъ горячимъ поклонникомъ Хорнерова метода, усовершенствовалъ его еще болѣе въ нѣкоторыхъ деталяхъ. Онъ былъ убѣжденъ въ томъ, что изложеніе этого метода должно быть включено въ учебники ариѳметики; онъ преподавалъ его своимъ ученикамъ и подымалъ на смѣхъ Кэмбриджскихъ экзаменаторовъ, незнакомыхъ съ методомъ Хорнера [2]). Де Морганъ поощрялъ учащихся къ производству длинныхъ ариѳметическихъ выкладокъ, съ цѣлью пріобрѣсти умѣніе вычислять правильно и быстро. Такъ, одинъ изъ его учениковъ нашелъ рѣшеніе уравненія $x^3 - 2x = 5$ съ 103 десятичными знаками, „другой попробовалъ дойти до 150 знаковъ, но вычисленіе оборвалось на 76-мъ знакѣ, который оказался невѣрнымъ“ [3]). Хотя, по нашему мнѣнію, Де Морганъ сильно преувеличивалъ значеніе Хорнерова метода для обыкновеннаго ученика и, можетъ быть, зашелъ слишкомъ далеко въ вопросѣ о вычисленіяхъ, однако, съ другой стороны, несомнѣнно вѣрно, что американскіе преподаватели впали въ противоположную крайность, пренебрегая *искусствомъ* быстраго вычисленія; поэтому бросается въ глаза неумѣніе нашей школьной молодежи считать *быстро* и *точно* [4]).

---

[1]) Dictionary of National Biography.

[2]) См. *De Morgan,* Budget of Paradoxes, 1872.

[3]) *Graves,* Life of Sir Wm. Rowan Hamilton, III, p. 275.

[4]) Интересна цитата изъ статьи Де Моргана „On Arithmetical Computation“ („Объ ариѳметическомъ вычисленіи“) въ Companion to the British Almanac за 1844 г., которую приводитъ Mr. E. M. Langley въ Eighteenth General Report of the A. I. G. T., 1892, p. 40: „Ростъ вычислительныхъ способностей на континентѣ, хотя и значительный, не шелъ такъ быстро, какъ въ Англіи. Мы могли бы подтвердить многочисленными примѣрами справедливость этого утвержденія. Въ 1696 году De Lagny, извѣстный своими трудами въ области алгебры, членъ Академіи Наукъ, говорилъ, что самый искусный вычислитель

Въ связи съ вопросомъ объ ариѳметическихъ выкладкахъ мы разсмотримъ вопросъ о приближенномъ вычисленіи числа π. Въ первые времена европейскіе вычислители пользовались геометрическимъ методомъ Архимеда, вычисляя π съ помощью вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ. Такъ, Вьета около 1580 г. вычислилъ π съ десятью знаками, Adrianus Romanus (1561 — 1615) изъ Лёвена, съ 15 знаками, Ludolph van Ceulen (1540 — 1610) съ 35 знаками. Этотъ послѣдній ученый потратилъ цѣлые годы на свое вычисленіе, и полученный имъ результатъ показался столь необыкновеннымъ, что найденное имъ число было вырѣзано на его надгробномъ камнѣ на кладбищѣ Св. Петра въ Лейденѣ. Камня этого уже нѣтъ, но осталось его описаніе. По имени Лудольфа значеніе π называется часто „Лудольфовымъ числомъ“. Въ семнадцатомъ столѣтіи было замѣчено, что вычисленія могутъ быть значительно сокращены, если пользоваться безконечными рядами. Такой рядъ, а именно *) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$, былъ предложенъ впервые

не могъ бы найти менѣе, чѣмъ въ мѣсяцъ, кубическій корень изъ 696536483318640035073641037 съ точностью до одной единицы. Если бы De Lagny могъ сказать это своему современнику Аврааму Шарпу (Abraham Sharp), то мы бы дорого дали, чтобы присутствовать при этомъ. Въ настоящее время, однако, какъ въ нашихъ университетахъ, въ Англіи, такъ и вездѣ за границей, тѣ, которые занимаются высшими отдѣлами математики, нисколько не расположены къ поощренію вычисленій, а элементарныя руководства грѣшатъ недостаткомъ численныхъ примѣровъ“. Примѣръ De Lagny былъ предложенъ де Моргану на урокѣ, и онъ нашелъ корень съ точностью до пятаго десятичнаго знака *менѣе, чѣмъ въ двадцать минутъ.* Mr. Langley приводитъ вычисленія Де Моргана на стр. 41 упомянутой нами статьи. Mr. Langley и Mr. R. B. Hayward поддерживаютъ мысль о замѣнѣ Хорнеровымъ методомъ „тѣхъ неуклюжихъ правилъ извлеченія корней, которыя учащійся встрѣчаетъ еще обыкновенно въ руководствахъ“. См. статью *Хэйуарда* въ A. I. G. T. Report, 1889, pp. 59 — 68, а также статью *Де Моргана* „Involution“ въ Penny или English Cyclopaedia.

*) Англичане и американцы обозначаютъ символомъ $tan^{-1} x$ дугу, тангенсъ которой есть x, — то же, что на континентѣ обозначаютъ черезъ $arc\ tg\ x$. Точно такъ же $sin^{-1} x$ означаетъ $arc\ sin\ x$. Англійскія обозначенія во многихъ отношеніяхъ лучше и послѣдовательнѣе нашихъ.
Прим. ред.

Яковомъ Грегори въ 1671 г. Быть можетъ, самыми легкими являются формулы, употреблявшіяся Мачиномъ и Дазе. Формула Мачина слѣдующая:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}.$$

Англичанинъ Авраамъ Шарпъ, искусный механикъ и вычислитель, бывшій нѣкоторое время помощникомъ астронома Флэмстида, принялъ дугу въ формулѣ Грегори равной 30° и вычислилъ π съ 72 знаками въ 1705 году; въ слѣдующемъ году Machin, профессоръ астрономіи въ Лондонѣ, далъ π со 100 знаками; французъ De Lagny, около 1719 года, нашелъ 127 знаковъ; нѣмецъ Georg Vega, въ 1794 году,— 140 знаковъ; англичанинъ Rutherford, въ 1841 г.,— 208 знаковъ (изъ коихъ вѣрны 152); нѣмецъ Zacharias Dase, въ 1844 году,— 205 знаковъ; нѣмецъ Th. Clausen, въ 1847 г.,— 250 знаковъ; англичанинъ Rutherford, въ 1853 году,— 440 знаковъ; William Shanks, въ 1873 году,— 707 знаковъ [1]). Можно замѣтить, что эти длинныя вычисленія не имѣютъ никакого значенія, ни теоретическаго ни практическаго. Безконечно интереснѣе и полезнѣе данное Ламбертомъ, въ 1761 г., доказательство ирраціональности π [2]) и Линдеманово доказательство того, что π не есть алгебраическое число, т. е. не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія.

Безконечные ряды, могущіе служить для вычисленія π, были даны также Хёттономъ и Эйлеромъ. *Leonhard Euler* (1707—1783) изъ Базеля способствовалъ въ огромной мѣрѣ развитію высшей математики, но его вліяніе простиралось и на элементарные предметы. Онъ изложилъ тригонометрію, какъ отрасль анализа, ввелъ (одновременно съ Томасомъ Симпсономъ въ Англіи) принятыя теперь сокращенныя обозначенія [*]) для тригонометрическихъ функцій и упростилъ тригонометрическія формулы съ помощью очень простого

---

[1]) *W. W. R. Ball.* Math. Recreations and Problems, pp. 171—173. Ball даетъ библіографическія указанія.

[2]) См. доказательство въ Géométrie Лежандра, Note IV, гдѣ это доказательство распространено и на π^2.

[*]) См. приложеніе въ концѣ книги: „Къ исторіи сокращенныхъ обозначеній въ тригонометріи". *Прим. ред.*

пріема, а именно, обозначая углы треугольника черезъ A, B, C, а противолежащія имъ стороны черезъ a, b, c. На старости лѣтъ, сдѣлавшись слѣпымъ, онъ продиктовалъ слугѣ свою *Anleitung zur Algebra*; книга эта, напечатанная въ 1770 г.*), хотя и представляетъ собою совершенно элементарное руководство, но заслуживаетъ вниманія, какъ одна изъ первыхъ попытокъ дать прочное обоснованіе главнымъ пріемамъ алгебры. Въ 1818 г. Джонъ Фарраръ (John Farrar) изъ Харвардъ Колледжа издалъ *Введеніе въ Начальную Алгебру, . . . извлеченіе изъ Алгебры Эйлера (Introduction to the Elements of Algebra, . . . selected from the Algebra of Euler).*

Въ концѣ восемнадцатаго вѣка выдвинулся на первый планъ вопросъ о графическомъ изображеніи и объясненіи мнимаго количества $\sqrt{-1}$. Теорія мнимыхъ, подобно теоріи отрицательныхъ чиселъ, стала рѣшительно двигаться впередъ только тогда, когда введены были въ нее видимыя глазу изображенія. Во времена Ньютона, Декарта и Эйлера мнимыя числа все еще представляли собой алгебраическую фикцію. Геометрическое изображеніе было дано Г. Кюномъ, учителемъ въ Данцигѣ, въ 1750 — 1751 г.**). Подобныя же

*) Vollständige Anleitung zur Algebra, St.-Petersburg, 1770, въ двухъ томахъ; нѣмецкому подлиннику предшествовало изданіе перваго тома въ русскомъ переводѣ: Ариѳметика Универсальная, или Алгебра, сочиненіе академика *Леонгарда Эйлера*; пер. съ нѣм. ... Спб., 1768; 2-ая часть. Спб., 1773 (*Сопиковъ*. Опытъ росс. библ. Ч. II, А—Д., Спб., 1814, 2025). Мнѣ удалось видѣть только второе изданіе этого перевода подъ заглавіемъ: Универсальная Ариѳметика *Г. Леонгарда Эйлера*, переведенная съ нѣмецкаго подлинника студентами *Петромъ Иноходцевымъ* и *Иваномъ Юдинымъ*.— Вторымъ тисненіемъ. Въ Спб. при Императорской Академіи Наукъ; т. I, 1787 г., въ 8 д. л. — Къ французскому переводу Эйлеровой Алгебры Лагранжъ написалъ свои знаменитыя прибавленія, относящіяся къ неопредѣленному анализу; прибавленія эти перепечатаны съ петербургскаго изданія французской алгебры 1798 г., въ VII томѣ собранія сочиненій Лагранжа. *Прим. ред.*

**) См. Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Auctore *Henrico Kuehnio*, Novi Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop., T. III, 1750—1751, P. 1753, pp. 170—223 (ср. *ibid.* Summarium, p. 18). Это совершенно неудачная попытка, которую ни въ какомъ отношеніи нельзя сравнивать съ работами Buée, Français и Аргана. Мемуара Кюна, какъ совершенно справедливо замѣтилъ *Montucla* (Hist. d. Math., t. III, p. 30), не стоитъ и читать. *Прим. ред.*

попытки были сдѣланы французами А. К. Бюэ (Adrien Quentin Buée) и J. F. Français и въ особенности *Жаномъ Робертомъ Аргановъ* (*Jean Robert Argand,* 1768—?) изъ Женевы, который въ 1806 году опубликовалъ замѣчательный *Essai*[1]) *). Но всѣ эти труды обратили на себя мало вниманія, и лишь великому *Карлу Фридриху Гауссу* (*Carl Friedrich Gauss,* 1777—1855), изъ Гёттингена, удалось сломить послѣднее сопротивленіе введенію мнимыхъ количествъ. Онъ ввелъ независимую мнимую единицу *i*, на равныхъ правахъ съ 1, и разсматривалъ $a+ib$, какъ „составное число". Несмотря на то, что мнимыя выраженія признаны „числами" всѣми великими математиками девятнадцатаго вѣка, существуютъ еще руководства, гдѣ можно найти устарѣлый взглядъ, по которому $\sqrt{-1}$ не число или не количество.

Ясныя понятія объ основныхъ началахъ алгебры были выработаны лишь въ девятнадцатомъ вѣкѣ. Во второй половинѣ восемнадцатаго вѣка мы встрѣчаемъ въ Кэмбриджѣ, въ Англіи, протесты противъ употребленія отрицательныхъ количествъ[2]). Былъ распространенъ тотъ взглядъ, что между

---

[1]) См. Imaginary Quantities. Their Geometrical Interpretation. Translated from the French of *M. Argand* by *A. S. Hardy*, New York, 1881.

*) Essai sur une manière de représenter les Quantités Imaginaires dans les constructions géométriques. Paris, 1806, безъ имени автора. 2-ое изданіе: Paris, 1874. Essai etc. p. *R. Argand,* 2-e éd., précédée d'une préface par *M. J. Hoüel* et suivie d'un appendice contenant des Extraits des *Annales de Gergonne,* relatifs à la question des imaginaires. Не менѣе замѣчательна работа норвежца *Веселя* (*Caspar Wessel,* 1745—1818) Om Directionens analytiske Betegning (Объ аналитическомъ представленіи направленія), представленная Королевской Датской Академіи Наукъ въ 1797 г. и напечатанная въ мемуарахъ этой Академіи въ 1779 г.; см. Essai sur la représentation analytique de la direction par *Caspar Wessel.* Traduction . . . Publ. avec . . . préfaces de MM. *H. Valentiner* et *T.-N. Thiele* par l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark. Copenhague, 1897. Въ этомъ мемуарѣ содержится также теорія алгебраическихъ дѣйствій надъ отрѣзками прямыхъ въ пространствѣ — первое приложеніе кватерніоновъ, почти за пятьдесятъ лѣтъ до появленія трудовъ Гамильтона. *Прим. ред.*

[2]) См. *C. Wordsworth,* Scholae Academicae: Some Account of the Studies at English Universities in the Eighteenth Century, 1877, p. 68; Teach. and Hist. of Math. in. the U. S., pp. 385—387.

ариѳметикой и алгеброй нѣтъ различія. Дѣйствительно, такіе авторы, какъ Maclaurin, Saunderson, Thomas Simpson, Hutton, Bonnycastle, Bridge, начинали свои трактаты съ изложенія ариѳметической алгебры, вводя лишь постепенно и въ скрытомъ видѣ отрицательныя количества. Старые американскіе авторы подражали англичанамъ. Въ девятнадцатомъ же столѣтіи основныя начала алгебры были тщательно изслѣдованы Джорджемъ Пикокомъ (George Peacock) [1]), Д. Ф. Грегори (D. F. Gregory) [2]), Де Морганомъ (De Morgan) [3]). Изъ континентальныхъ ученыхъ мы можемъ упомянуть о Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857) [4]), Мартинѣ Омѣ (Martin Ohm) [5]) и въ особенности о Германѣ Ганкелѣ (Hermann Hankel) [6]). Новый потокъ свѣта пролили на этотъ предметъ своими составившими эпоху изслѣдованіями William Rowan Hamilton, Hermann Grassmann и Benjamin Peirce; они придумали новыя алгебры, управляемыя законами, отличными отъ законовъ обыкновенной алгебры [7]).

---

[1]) См. его *Алгебру*, 1830 и 1842 гг., и его „Report on Recent Progress in Analysis", напечатанный въ Reports of the British Association, 1833.

[2]) „On the Real Nature of Symbolical Algebra", Trans. Roy. Soc. Edinburgh, Vol. XIV, 1840, p. 280.

[3]) „On the Foundation of Algebra", Cambridge Phil. Trans., VII, 1841, 1842; VIII, 1844, 1847.

[4]) Analyse Algébrique, 1821, p. 173 et suiv.*).

*) Алгебраическій Анализъ *О. Л. Коши*, переведенъ съ французскаго *Ѳ. Эвальдомъ, В. Григорьевымъ, А. Ильинымъ*. Leipzig, 1864. стр. 160 и слѣд. *Прим. ред.*

[5]) Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, 1822, 2-ое изд. 1828.

[6]) Die Complexen Zahlen, Leipzig, 1867. Это сочиненіе очень богато историческими замѣтками. Большая часть библіографическихъ указаній по этому предмету заимствована изъ этого сочиненія.

[7]) Превосходный историческій очеркъ Сложной Алгебры (Multiple Algebra) читатель найдетъ въ статьѣ *Гиббса (J. W. Gibbs)*, въ Proceed. Am. Ass. for the Adv. of Science, Vol. XXXV, 1886.

Геометрія и Тригонометрія

Изданія Евклида. Раннія изслѣдованія.

Съ окончаніемъ пятнадцатаго столѣтія и съ началомъ шестнадцатаго мы вступаемъ въ новую эру. Въ ариѳметикѣ, алгебрѣ и тригонометріи математики достигли въ это время многаго, геометрія же развивалась медленнѣе. Изученіе греческихъ рукописей, проникшихъ въ Западную Европу послѣ паденія Константинополя въ 1453 году, позволило издать болѣе правильные переводы Евклида. Въ началѣ разсматриваемаго періода было изобрѣтено книгопечатаніе; книги сдѣлались дешевы и ихъ стало много. Первое печатное изданіе Евклида вышло въ свѣтъ въ Венеціи въ 1482 году. Это былъ переводъ съ арабскаго, сдѣланный Кампаномъ. Другія изданія того же перевода появились въ Ульмѣ въ 1486 г. и въ Базелѣ въ 1491 г. Съ греческаго подлинника на латинскій языкъ перевелъ Евклида впервые *Bartholomæus Zambertus;* переводъ этотъ былъ изданъ въ Венеціи въ 1505 г.; здѣсь переводъ Кампана подвергся строгой критикѣ. Это заставило Пачіоли въ 1509 г. выпустить въ свѣтъ новое изданіе, скрытой цѣлью котораго было, повидимому, оправдать Кампана во взведенныхъ на него обвиненіяхъ [1]). Другое изданіе Евклида появилось въ Парижѣ въ 1516 г. Первое изданіе Евклида, напечатанное по-гречески, вышло въ Базелѣ въ 1533 г.; издалъ его *Simon Grynœus.* Въ теченіе 170 лѣтъ это изданіе было единственнымъ греческимъ текстомъ. Въ 1703 г. *David Gregory* издалъ въ Оксфордѣ въ

---

[1]) *Cantor,* II, p. 312.

подлинникѣ всѣ дошедшія до насъ сочиненія Евклида. Книга эта оставалась единственнымъ полнымъ изданіемъ Евклида до 1883 года, когда Heiberg и Menge начали выпускать въ свѣтъ, по-гречески и по-латыни, свое изданіе сочиненій Евклида. Первый англійскій переводъ *Началъ* былъ сдѣланъ въ 1570 г. съ греческаго языка; авторъ его „H. Billingsley, лондонскій гражданинъ“ [1]). Англійское изданіе *Началъ* и *Data* было опубликовано въ 1758 г. *Робертомъ Симсономъ* (*Robert Simson*, 1687 — 1768), профессоромъ математики въ университетѣ въ Глазго. Его текстъ до послѣдняго времени служилъ основаніемъ почти всѣхъ школьныхъ изданій. Онъ значительно отличается отъ подлинника. Симсонъ исправилъ нѣсколько ошибокъ, встрѣчающихся въ греческихъ рукописяхъ. Онъ считалъ, что всѣ эти ошибки сдѣланы были неопытными издателями и ни одной изъ нихъ не приписывалъ самому Евклиду. Точный англійскій переводъ греческаго текста былъ сдѣланъ *Яковомъ Вильямсономъ (James Williamson)*. Первый томъ появился въ Оксфордѣ въ 1781 г., второй томъ въ 1788 г. Школьныя изданія *Началъ* содержатъ обыкновенно первыя шесть книгъ, а также книги одиннадцатую и двѣнадцатую.

---

[1]) Въ General Dictionary *Бэйля (Bayle)*, Лондонъ, 1735 г., сказано, что Billingsley „сдѣлалъ большіе успѣхи въ математикѣ подъ руководствомъ своего друга м-ра Уайтхэда, который, оставшись безъ мѣста послѣ закрытія монастырей въ царствованіе Генриха VIII, былъ принятъ въ старости Биллингсли и пользовался поддержкой въ его домѣ въ Лондонѣ“. Биллингсли былъ богатъ и былъ лордъ-мэромъ Лондона въ 1591 году. Какъ и другіе ученые того времени, онъ смѣшивалъ нашего Евклида съ Евклидомъ изъ Мегары. Предисловіе къ англійскому изданію написалъ John Dee, знаменитый астрологъ и математикъ. Интересныя свѣдѣнія о Ди даны въ Dictionary of National Biography. Де Морганъ полагалъ, что Ди сдѣлалъ весь переводъ, но это отрицается въ статьѣ „Billingsley“ упомянутаго словаря. Одно время полагали, что Биллингсли переводилъ съ арабско-латинской версіи, но Г. Б. Хальстеду удалось доказать съ помощью фоліанта — бывшаго когда-то собственностью Биллингсли — [хранящагося теперь въ библіотекѣ Принстонъ Колледжа и содержащаго греческое изданіе 1533 г., а также нѣсколько другихъ изданій], что Биллингсли переводилъ съ греческаго языка, а не съ латинскаго. См. „Note on the First English Euclid“ въ Am. Jour. of Mathem., Vol II, 1879.

Возвращаясь ко времени Возрожденія, мы упомянемъ о нѣкоторыхъ изъ наиболѣе интересныхъ задачъ, разсматривавшихся тогда геометрами. Мы не находимъ еще въ тѣ времена никакого слѣда развитія *новыхъ геометрическихъ методовъ изслѣдованія*. Въ своей книгѣ *De triangulis*, 1533, нѣмецкій астрономъ *Regiomontanus* даетъ теорему (которая была уже извѣстна Проклу) о томъ, что три перпендикуляра, опущенные изъ вершинъ треугольника, встрѣчаются въ одной точкѣ, и показываетъ, какъ находить радіусъ описаннаго круга по тремъ сторонамъ. Онъ даетъ первую, со времени Аполлонія и Зенодора, задачу о наибольшемъ значеніи, а именно о томъ, какъ найти на полу точку (или, скорѣе, мѣсто этой точки), съ которой вертикальный шестъ въ 10 футовъ длины, нижній конецъ котораго находится на 4 фута отъ пола, кажется наибольшимъ (т. е. виденъ подъ наибольшимъ угломъ) [1]). Новое открытіе представляетъ слѣдующая теорема, которая ярко обрисовываетъ глубокое различіе между плоской геометріей и геометріей на сферѣ: по тремъ угламъ сферическаго треугольника можно вычислить три его стороны и наоборотъ. Регіомонтанъ разсматривалъ также звѣздчатые многоугольники. Онъ былъ, вѣроятно, хорошо знакомъ съ сочиненіями, написанными по этому предмету Кампаномъ и Брадвардиномъ. Регіомонтанъ, и въ особенности французъ *Charles de Bouvelles* или Carolus Bovillus (1470 — 1533), положили основаніе теоріи правильныхъ звѣздчатыхъ многоугольниковъ [2]).

---

[1]) *Cantor,* II, 259.

[2]) Подробная теорія звѣздчатыхъ многоугольниковъ и многогранниковъ дана въ книгѣ *S. Günther,* Vermischte Untersuchungen, pp. 1—92. Звѣздчатые многоугольники обращали на себя вниманіе геометровъ всѣхъ временъ, даже вплоть до нашего времени. Наиболѣе выдающимися изъ этихъ геометровъ являются Petrus Ramus, Athanasius Kircher (1602—1680), Albert Girard, Johannes Broscius (Brożek—полякъ), J. Kepler, A. L. F. Meister (1724—1788), C. F. Gauss, A. F. Möbius, L. Poinsot (1777—1859), C. C. Krause. Мёбіусъ даетъ слѣдующее опредѣленіе площади многоугольника, полезное въ томъ случаѣ, когда стороны его пересѣкаются: *Пусть данъ произвольно построенный плоскій многоугольникъ* $AB \ldots MN$; *соединимъ точку* P *плоскости съ вершинами прямыми линіями; сумма* $PAB + PBC + \ldots + PMN + PNA$ *не зависитъ отъ положенія* P *и представляетъ собою площадь многоугольника.* При этомъ $PAB = - PBA$.

Построеніе правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ обратило на себя особое вниманіе великаго живописца и архитектора *Leonardo da Vinci* (1452 — 1519). Нѣкоторые изъ его методовъ—простыя приближенія, не представляющія никакого теоретическаго интереса; они не лишены, однако, практическаго значенія. Свой способъ построенія правильнаго вписаннаго семиугольника (конечно, только приблизительно) онъ считалъ вполнѣ точнымъ! Подобныя же построенія даны были великимъ нѣмецкимъ художникомъ *Альбрехтомъ Дюреромъ* (1471 — 1528). Онъ первый всегда ясно и правильно указываетъ на то, какія именно построенія являются приблизительными [1]). Какъ Леонардъ да Винчи, такъ и Дюреръ въ нѣкоторыхъ случаяхъ производятъ построенія, пользуясь только однимъ растворомъ циркуля. Паппъ въ одномъ случаѣ задался цѣлью рѣшить задачу при этомъ ограниченіи; Абу̂ль Уафа̂ дѣлалъ это часто; но теперь методъ этотъ становится знаменитымъ. *Тарталья* пользовался имъ въ 67 различныхъ построеніяхъ; его употреблялъ также ученикъ Тартальи *Giovanni Battista Benedetti* (1530 — 1590) [2]).

Слѣдуетъ помнить, что греческіе геометры требовали, чтобы всѣ *геометрическія* построенія выполнялись только съ помощью линейки и циркуля; другіе методы, предлагавшіеся отъ времени до времени, давали построенія только съ помощью циркуля, или съ помощью одной линейки [3]),

---

[1]) *Cantor,* II, 427.

[2]) Дальнѣйшія подробности см. у *Кантора,* II, 271, 484, 485, 521, 522; *S. Günther,* Nachträge, p. 117 и пр. Наиболѣе полнаго развитія этотъ изящный методъ достигъ у Штейнера и Понслэ; см. *Steiner,* Die Geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin, 1833 (Новое изданіе, Ostwald's Klassiker, Nr. 60, Leipzig, 1895); *Poncelet,* Traité des propriétés projectives, Paris, 1822, p. 187 и пр.

[3]) Задачи, разрѣшимыя съ помощью одной линейки, даны у *Ламберта* въ его Freie Perspective, Zürich, 1774; у *Servois,* Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique, 1805; *Brianchon,* Mémoire sur l'application de la théorie des transversales. См. также *Chasles,* p. 210; *Cremona,* Elements of Projective Geometry, Transl. by *Leudesdorf,* Oxford, 1885, pp. XII, 96 — 98.

или посредствомъ линейки, циркуля и другихъ добавочныхъ инструментовъ. Построенія послѣдняго рода предлагались и греками, но они считали ихъ *механическими*, а не *геометрическими*. Особенной чертой въ теоріи всѣхъ этихъ методовъ является то обстоятельство, что элементарная геометрія не можетъ дать отвѣта на общій вопросъ: какія именно построенія могутъ быть выполнены съ помощью каждаго изъ этихъ методовъ? Для полученія отвѣта на этотъ вопросъ приходится обратиться къ алгебраическому анализу [1]).

Построеніе съ помощью инструментовъ, отличныхъ отъ линейки и циркуля, мы находимъ въ квадратурѣ круга, придуманной Леонардомъ да Винчи. Онъ беретъ цилиндръ, высота котораго равна половинѣ его радіуса; слѣдъ отъ катанія этого цилиндра по плоскости, получаемый при одномъ оборотѣ — прямоугольникъ, площадь котораго равна площади круга. Нѣтъ ничего проще этой квадратуры; нельзя только утверждать, что она рѣшаетъ задачу въ томъ смыслѣ, какъ понимали ее греки. Древніе не допускали твердаго цилиндра въ качествѣ прибора для построеній и имѣли на это достаточно причинъ: съ помощью линейки мы можемъ провести прямую линію какой угодно длины, съ помощью обыкновеннаго циркуля — всякій кругъ, необходимый для чертежа, посредствомъ же даннаго цилиндра мы не можемъ выполнить ни одного построенія, имѣющаго какое-либо практическое значеніе. Ни одному чертежнику никогда не придетъ въ голову мысль пользоваться цилиндромъ [2]).

Альбрехту Дюреру принадлежитъ честь интереснаго замѣчанія, относящагося къ многогранникамъ: онъ показалъ, какъ можно построить изъ бумаги правильный и полуправильный многогранникъ, вырѣзавъ цѣликомъ

---

[1]) *Klein,* p. 2.*)

*) Ср. *A. Adler.* Theorie der geometrischen Konstructionen, Sammlung Schubert, LII, Leipzig, 1906. — Книга эта въ русскомъ переводѣ подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго,* подъ заглавіемъ: *А. Адлеръ.* Теорія геометрическихъ построеній, печатается (Одесса, книгоиздательство *Mathesis*). *Прим. ред.*

[2]) Ср. интересную статью *Германа Шуберта (Hermann Schubert)* „Squaring of the Circle“ въ журналѣ Monist, Jan., 1891.

ограничивающій его многоугольникъ и затѣмъ сложивъ бумагу по соотвѣтствующимъ краямъ [1]).

Многогранники были любимымъ предметомъ изученія для *Іоанна Кеплера.* Въ 1596 году, въ началѣ своей удивительной научной карьеры, онъ сдѣлалъ мнимое открытіе, которое принесло ему много славы. Онъ вообразилъ себѣ икосаэдръ, додекаэдръ, тетраэдръ и кубъ, вложенные одинъ въ другой, на такихъ разстояніяхъ, что каждый изъ многогранниковъ являлся вписаннымъ въ шаръ, около котораго былъ описанъ слѣдующій, заключающій въ себѣ предыдущій. Предположивъ, что солнце расположено въ центрѣ, а планеты движутся по большимъ кругамъ, расположеннымъ на поверхностяхъ шаровъ,— принявъ радіусъ шара, заключеннаго между икосаэдромъ и додекаэдромъ, равнымъ радіусу земной орбиты,— онъ нашелъ, что разстоянія между этими планетами соотвѣтствуютъ приблизительно астрономическимъ наблюденіемъ. Это напоминаетъ намъ пиѳагорейскій мистицизмъ. Но болѣе зрѣлыя размышленія, а также знакомство и обмѣнъ мыслей съ Тихо Браге и Галилеемъ, привели его къ изслѣдованіямъ и результатамъ, болѣе достойнымъ его генія,—„законамъ Кеплера". Кеплеръ далеко подвинулъ впередъ теорію звѣздчатыхъ многогранниковъ [2]). Новый родъ геометрическихъ доказательствъ, которымъ впослѣдствіи широко пользовались авторы элементарныхъ руководствъ въ Европѣ и Америкѣ, былъ введенъ французомъ Францискомъ Вьетой. Онъ разсматривалъ кругъ, какъ многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ сторонъ [3]). На ту же точку зрѣнія становился и Кеплеръ. Въ новѣйшія времена авторы элементарныхъ руководствъ разстались съ этой геометрической фикціей; кругъ не многоугольникъ, а *предѣлъ* многоугольника. Для математиковъ знакомыхъ съ высшей наукой идея Вьеты очень полезна, какъ упрощающая доказательства; они могутъ пользоваться ею съ полной увѣренностью.

---

[1]) *Cantor,* II, 428.

[2]) Чертежи Кеплеровыхъ звѣздчатыхъ многогранниковъ, а также подробную исторію этого предмета читатель найдетъ въ сочиненіи *С. Гюнтера,* Vermischte Untersuchungen, pp. 36 — 92.

[3]) *Cantor,* II, 540.

Возрожденіемъ тригонометріи въ Германіи мы обязаны, главнымъ образомъ, *Іоганну Мюллеру*, называемому обыкновенно *Регіомонтаномъ* (1436 — 1476). Онъ учился въ Вѣнѣ у знаменитаго Георга Пурбаха, начавшаго переводить съ греческаго языка *Альмагестъ;* переводъ этотъ былъ законченъ Регіомонтаномъ, который переводилъ также съ греческаго сочиненія Аполлонія, Архимеда и Герона. Вмѣсто раздѣленія радіуса на 3438 частей на индусскій манеръ, Регіомонтанъ принялъ раздѣленіе его на 600 000 равныхъ частей и затѣмъ построилъ болѣе точную таблицу синусовъ. Позднѣе онъ подраздѣлилъ радіусъ на 10 000 000 частей. *Тангенсъ* былъ уже раньше извѣстенъ въ Европѣ, а именно англичанину Брадвардину, но Регіомонтанъ сдѣлалъ еще шагъ впередъ, вычисливъ таблицу тангенсовъ. Онъ написалъ трактатъ по тригонометріи, заключающій рѣшенія плоскихъ и сферическихъ треугольниковъ. Форма, которую онъ придалъ тригонометріи, въ главныхъ чертахъ сохранилась до настоящаго времени. Работу вычисленія точныхъ таблицъ продолжали преемники Регіомонтана. Болѣе усовершенствованные астрономическіе инструменты доставляли болѣе точныя наблюденія и дѣлали необходимымъ вычисленіе болѣе обширныхъ таблицъ тригонометрическихъ функцій. Изъ различныхъ таблицъ, вычисленныхъ въ тѣ времена, особаго упоминанія заслуживаетъ таблица *Георга Іоахима (Georg Joachim)* изъ Фельдкирха въ Тиролѣ; его обыкновенно называютъ *Rhœticus*. Въ одной изъ своихъ таблицъ онъ принялъ радіусъ = 1 000 000 000 000 000 и далъ синусы различныхъ дугъ черезъ каждыя 10″. Онъ началъ также построеніе таблицъ тангенсовъ и секансовъ. Въ теченіе двѣнадцати лѣтъ онъ постоянно пользовался услугами нѣсколькихъ вычислителей, состоявшихъ у него на службѣ. Работа его была завершена ученикомъ его *Валентиномъ Ото (Valentin Otho)* въ 1596 г. Pitiscus вновь издалъ эти таблицы въ 1613 году. Таблицы эти представляютъ собою гигантскій памятникъ нѣмецкаго прилежанія и настойчивости. Рэтикусъ не былъ, однако, простымъ вычислителемъ. До его времени тригонометрическія функціи разсматривались всегда въ зависимости отъ дуги; онъ первый построилъ

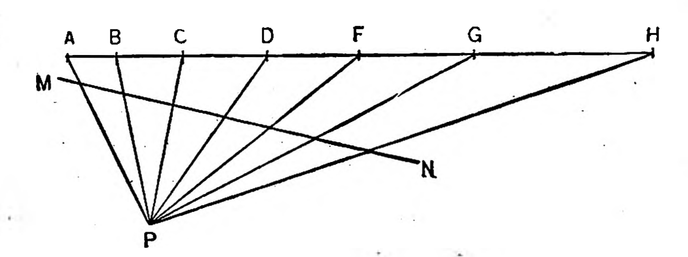
прямоугольный треугольникъ и поставилъ тригонометрическія функціи въ непосредственную связь съ углами этого треугольника. Прямоугольный треугольникъ и привелъ его къ мысли о вычисленіи гипотенузы, т. е. секанса. Онъ первый предположилъ построить таблицу секансовъ. Vieta, Adrianus Romanus, Nathaniel Torporley, John Napier, Willebrord Snellius, Pothenot и другіе тоже производили полезныя изслѣдованія въ области тригонометріи. Важная геодезическая задача — найти разстоянія вершинъ даннаго земного треугольника отъ точки, лежащей въ той же плоскости, по угламъ, подъ которыми видны стороны треугольника изъ этой точки, — была рѣшена Снелліемъ въ сочиненіи, появившемся въ 1617 г., а затѣмъ Pothenot въ 1730 г. Изслѣдованіе Снеллія было забыто, и задача эта сохранила названіе „задачи Потно".

Начала современной синтетической геометріи.

Въ началѣ семнадцатаго столѣтія въ геометріи произошло первое, со времени древнихъ грековъ, замѣтное движеніе впередъ. Можно также замѣтить два направленія въ этомъ движеніи: 1) аналитическій путь, намѣченный геніемъ Декарта, изобрѣтателя аналитической геометріи; 2) синтетическій путь, съ новымъ принципомъ перспективы и теоріей трансверсалей. Первыми изслѣдователями въ области новой синтетической геометріи являются Дезаргъ, Паскаль и Де Лагиръ.

Girard Desargues (1593 — 1662), изъ Ліона, былъ архитекторомъ и инженеромъ. Онъ служилъ у кардинала Ришелье при осадѣ Ла Рошели въ 1628 году. Вскорѣ послѣ этого онъ удалился въ Парижъ, гдѣ и произвелъ свои геометрическія изслѣдованія. Наиболѣе выдающіеся изъ его современниковъ уважали и цѣнили его; однако, онъ подвергся жестокимъ нападкамъ со стороны другихъ, неспособныхъ оцѣнить его геній; сочиненія его находились въ пренебреженіи, объ нихъ забыли, стали забывать и самое имя Дезарга, и только въ началѣ девятнадцатаго столѣтія его спасли отъ забвенія Бріаншонъ и Понслэ. Дезаргъ, по-

добно Кеплеру и другимъ, ввелъ въ геометрію ученіе о безконечности [1]). Онъ показываетъ, что прямую линію можно разсматривать, какъ окружность круга, центръ котораго находится въ безконечности; отсюда слѣдуетъ, что оба конца прямой можно считать сходящимися въ безконечности; параллельныя линіи отличаются отъ другихъ паръ прямыхъ только тѣмъ, что точки ихъ пересѣченія находятся въ безконечности. Онъ даетъ теорію инволюціи шести точекъ; его опредѣленіе „инволюціи" отличается, однако, отъ современнаго опредѣленія, которое мы находимъ впервые у Фермата [2]), но которое было дѣйствительно введено въ геометрію Шалемъ [3]). На нѣкоторой прямой примемъ точку A за начало *(souche)*, возьмемъ также три пары точекъ B и H, C и G, D и F; тогда, говоритъ Дезаргъ, если $AB \cdot AH = AC \cdot AG = AD \cdot AF$, то наши шесть точекъ находятся въ „инволюціи". Если какая-нибудь изъ этихъ точекъ совпадаетъ съ началомъ, то другая, входящая съ ней въ ту же пару, должна быть на безконечно большомъ разстояніи отъ



начала. Если изъ какой-нибудь точки P провести прямыя черезъ данныя шесть точекъ и затѣмъ пересѣчь ихъ какой-нибудь трансверсалью MN, то въ пересѣченіи получится шесть новыхъ точекъ, тоже находящихся въ инволюціи; т. е. *инволюція есть зависимость проективная*. Дезаргъ даетъ также теорію полярныхъ линій. Предложеніе, называемое въ элементарныхъ руководствахъ „теоремой Дезарга", состоитъ въ слѣдующемъ: если вершины двухъ треуголь-

[1]) *Charles Taylor,* Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics. Cambridge, 1881, p. 61.

[2]) *Cantor,* II, 606, 620.

[3]) Ср. *Chasles,* Note X; *Marie,* III, 214.

никовъ, находящихся или въ пространствѣ или на одной плоскости, лежатъ на трехъ линіяхъ, встрѣчающихся въ одной точкѣ, то стороны ихъ пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой, и наоборотъ. Этой теоремой пользовались впослѣдствіи Brianchon, Sturm, Gergonne и другіе. Poncelet положилъ ее въ основаніе своей прекрасной теоріи гомологичныхъ фигуръ.

Хотя написанныя Дезаргомъ сочиненія и находились въ пренебреженіи у современниковъ, но эти идеи сохранили его послѣдователи Паскаль и *Philippe de Lahire.* Этотъ послѣдній въ 1679 году сдѣлалъ полный списокъ главнаго изслѣдованія Дезарга, опубликованнаго въ 1639 г. *Blaise Pascal* (1623 — 1662) былъ однимъ изъ очень немногихъ современниковъ, оцѣнившихъ по достоинству Дезарга. Онъ говоритъ въ своемъ *Essais pour les coniques*: „я охотно сознаюсь въ томъ, что тѣмъ немногимъ, что я нашелъ въ этой области, я обязанъ его сочиненіямъ“. Геометрическій геній Паскаля обнаружился, когда ему было только двѣнадцать лѣтъ отъ роду. Отецъ его хотѣлъ, чтобы онъ прежде, чѣмъ заняться математикой, изучилъ латинскій и греческій языки. Отъ него спрятали всѣ математическія книги. На вопросы мальчика о томъ, что такое математика, отецъ отвѣчалъ ему, что это „способъ дѣлать правильныя фигуры и находить пропорціи, въ которыхъ онѣ находятся между собой“. Вмѣстѣ съ тѣмъ ему запретили всякіе дальнѣйшіе разговоры объ этомъ. Но геній его не могъ подчиняться такимъ ограниченіямъ; размышляя о данномъ ему опредѣленіи, онъ чертилъ фигуры кускомъ угля на плитахъ пола. Онъ далъ свои собственныя названія этимъ фигурамъ, затѣмъ формулировалъ аксіомы; однимъ словомъ, пришелъ къ совершеннымъ доказательствамъ. Такимъ путемъ онъ пришелъ, безъ посторонней помощи, къ теоремѣ о равенствѣ суммы угловъ треугольника двумъ прямымъ угламъ. Отецъ поймалъ его на изученіи этой теоремы и былъ такъ пораженъ возвышенностью и силой его генія, что отъ радости расплакался. Послѣ этого отецъ Паскаля далъ ему Евклидовы *Начала,* которыя онъ легко одолѣлъ. Такова исторія ранняго отрочества Паскаля, какъ она разсказана

горячо преданной ему сестрой [1]). Разсказъ этотъ слѣдуетъ принимать *cum grano salis* (такъ какъ крайне нелѣпо предполагать, что молодой Паскаль, или кто-либо другой, могъ снова открыть геометрію до 32 предложенія I книги Евклида включительно, слѣдуя тому же способу изложенія и находя теоремы въ томъ же порядкѣ, въ какомъ онѣ встрѣчаются въ *Началахъ*); тѣмъ не менѣе вполнѣ вѣрно то, что необыкновенная проницательность Паскаля позволила ему въ шестнадцать лѣтъ написать трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ, который признанъ былъ такимъ удивительнымъ произведеніемъ, что, какъ говорили, со времени Архимеда не появлялось ничего, съ чѣмъ бы можно было сравнить его по силѣ генія. Декартъ отказался вѣрить тому, что его написалъ такой молодой человѣкъ, какъ Паскаль. Трактатъ этотъ не былъ никогда опубликованъ и теперь утерянъ. Лейбницъ видѣлъ его въ Парижѣ, совѣтывалъ его напечатать и далъ отчетъ о части его содержанія [2]). Паскаль опубликовалъ, однако, въ 1640 году, когда ему было шестнадцать лѣтъ, небольшой геометрическій трактатъ на шести страницахъ въ восьмую долю листа подъ заглавіемъ: *Essais pour les coniques*. Непрерывныя занятія въ нѣжномъ возрастѣ повредили здоровью Паскаля. Въ зрѣломъ возрастѣ онъ посвящалъ лишь небольшую часть своего времени занятіямъ математикой.

---

[1]) The Life of Mr. Paschal, by *Madam Perier*. Translated into English by W. A., London, 1744 *).

*) Vie de Blaise Pascal par *M-me Perier* (Gilberte Pascal). Эта біографія помѣщается обыкновенно въ собраніяхъ сочиненій Паскаля. См., напр., изд. *Ch. Lahure,* Paris, 1858, t. I, pp. 1—22. Замѣчательная книга о Паскалѣ написана Ж. Бертраномъ: *Joseph Bertrand,* Blaise Pascal, Paris, 1891. *Прим. ред.*

[2]) См. письмо, написанное Лейбницемъ племяннику Паскаля 30 августа 1676 г., приведенное въ Oeuvres complètes de Blaise Pascal, Paris, 1866, Vol. III, pp. 466—468 **). Трактатъ Essais pour les coniques находится въ III томѣ полнаго собранія сочиненій, pp. 182—185 ***), также въ Oeuvres de Pascal (Гага, 1779) и въ книгѣ *H. Weissenborn,* Die Projection in der Ebene, Berlin, 1862.

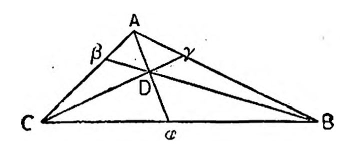
**) *Ed. Lahure,* t. II, pp. 638—640. *Прим. ред.*

***) *Ed. Lahure,* t. II, pp. 354—357. *Прим. ред.*

Два трактата Паскаля, только что упомянутые нами, содержали знаменитое предложеніе о таинственномъ шестиугольникѣ (hexagrammum mysticum), извѣстное подъ названіемъ „Теоремы Паскаля", а именно о томъ, что противуположныя стороны шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, пересѣкаются въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой. Въ нашихъ элементарныхъ руководствахъ по новой геометріи эта прекрасная теорема дается для одного очень спеціальнаго вида коническихъ сѣченій, а именно для круга Такъ какъ всякія двѣ прямыя линіи могутъ, въ извѣстномъ смыслѣ, быть разсматриваемы, какъ особый случай коническаго сѣченія, то теорема Паскаля приложима къ шестиугольникамъ, первая, третья и пятая вершины которыхъ находятся на одной линіи, а вторая, четвертая и шестая — на другой. Интересно замѣтить, что этотъ особый случай „Паскалевой Теоремы" встрѣчается уже у Паппа (Книга VII, Предл. 139). Паскаль говорилъ, что изъ теоремы своей онъ вывелъ больше 400 слѣдствій, обнимавшихъ собою коническія сѣченія Аполлонія и содержавшихъ въ себѣ еще много новыхъ результатовъ. Паскаль далъ теорему о двойномъ отношеніи, встрѣчающуюся впервые у Паппа [1]). Эта теорема, удивительно богатая слѣдствіями, можетъ быть выражена слѣдующимъ образомъ. Четыре линіи на плоскости, проходящія черезъ одну общую точку, отсѣкаютъ на какой-нибудь трансверсали четыре отрѣзка, находящіеся въ опредѣленномъ постоянномъ отношеніи, независящемъ отъ того, какъ проведена трансверсаль; т. е. если трансверсаль пересѣкаетъ лучи въ точкахъ A, B, C, D, то двойное отношеніе $\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$ четырехъ отрѣзковъ AC, AD, BC, BD одно и то же для всѣхъ трансверсалей. Изслѣдованія Дезарга и Паскаля раскрыли многія изъ богатыхъ сокровищъ новой синтетической геометріи; но благодаря всепоглощающему интересу, возбужденному аналитической геометріей Декарта, а затѣмъ дифференціальнымъ исчисленіемъ, геометрія эта находилась почти въ полномъ пренебреженіи до конца восемнадцатаго вѣка.

[1]) Книга VII, 129. Ср. *Chasles,* pp. 31, 32.

Развитію синтетической геометріи способствовали въ Англіи своими изслѣдованіями *Sir Isaac Newton, Roger Cotes* (1682 — 1716) и *Colin Maclaurin,* но ихъ изысканія выходятъ за предѣлы той области, къ которой относится настоящая исторія. *Robert Simson* и *Matthew Stewart* (1717 — 1785) старались, главнымъ образомъ, возродить греческую геометрію. Заслуживаетъ здѣсь упоминанія итальянскій геометръ *Giovanni Ceva* (1648? — 1734) [1]); его имя носитъ одно изъ предложеній элементарной геометріи. Онъ былъ инженеръ-гидравликъ и въ качествѣ таковаго нѣсколько разъ служилъ правительству Мантуи. Смерть его послѣдовала во время осады Мантуи въ 1734 г. Онъ считался выдающимся авторомъ въ области экономики — первымъ проницательнымъ математическимъ писателемъ по этому предмету. Въ 1678 г. онъ опубликовалъ въ Миланѣ сочиненіе *De lineis rectis*. Эта книга заключаетъ въ себѣ „Теорему Чевы", снабженную однимъ статическимъ доказательствомъ и двумя геометрическими.



Всякія три прямыя, проходящія черезъ вершины треугольника и встрѣчающіяся въ одной точкѣ, дѣлятъ противоположныя стороны такъ, что $C\alpha \cdot A\beta \cdot B\gamma = B\alpha \cdot C\beta \cdot A\gamma$. Въ книгѣ Чевы свойства прямолинейныхъ фигуръ доказываются помощью разсмотрѣнія свойствъ центра инерціи (тяжести) системы точекъ [2]).

Современная элементарная геометрія.

Мы считаемъ удобнымъ при разсмотрѣніи этого предмета раздѣлить его на слѣдующіе четыре отдѣла: 1) современная синтетическая геометрія, 2) современная геометрія треугольника и круга, 3) не-Евклидова геометрія, 4) руководства по элементарной геометріи. Первый изъ этихъ отдѣловъ относится къ современнымъ синтетическимъ *методамъ изслѣдованія,* второй — къ *новымъ теоремамъ* элементарной геометріи, третій разсматриваетъ современныя *понятія о*

---

1) *Palgrave's* Dict. of Political Econ., London, 1894.

2) *Chasles,* Notes VI, VII.

пространствѣ и различныя геометріи, возникающія изъ этихъ понятій, четвертый содержитъ разсужденія о вопросахъ, относящихся къ преподаванію геометріи.

I. *Современная синтетическая геометрія.* — Генію *Гаспара Монжа* (*Gaspard Monge*, 1746—1818) выпало на долю выставить синтетическую геометрію на первый планъ и открыть новые пути къ прогрессу. Во избѣжаніе длинныхъ ариѳметическихъ выкладокъ при составленіи фортификаціонныхъ плановъ, этотъ даровитый инженеръ замѣнилъ ихъ геометрическими методами и пришелъ, такимъ образомъ, къ основанію начертательной геометріи, какъ отдѣльной отрасли науки. Монжъ былъ профессоромъ въ Нормальной школѣ въ Парижѣ въ теченіе четырехъ мѣсяцевъ ея существованія, въ 1795 г.; затѣмъ онъ принималъ участіе въ основаніи Политехнической школы и былъ тамъ профессоромъ, а потомъ сопровождалъ Наполеона въ Египетской кампаніи. Среди учениковъ его были Dupin, Servois, Brianchon, Hachette, Biot и Poncelet. *Charles Julien Brianchon* родился въ Севрѣ въ 1785 году; теорему, носящую его имя, онъ вывелъ изъ „Паскалевой Теоремы“ съ помощью найденныхъ Дезаргомъ свойствъ линій, называемыхъ теперь полярами [1]). Теорема Бріаншона гласитъ: „Прямыя, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника, образованнаго какими-нибудь шестью касательными къ коническому сѣченію, встрѣчаются въ одной точкѣ“. Эта точка встрѣчи называется иногда „Бріаншоновой точкой“.

Lazare Nicholas Marguerite Carnot (1753—1823) родился въ Nolay въ Бургундіи. Когда началась революція, онъ погрузился въ политику, а затѣмъ когда европейская коалиція въ 1793 году направила противъ Франціи милліонъ воиновъ, Карно совершилъ огромное дѣло организаціи четырнадцати армій, выступившихъ навстрѣчу непріятелю. Въ 1796 году онъ воспротивился *coup d'état* Наполеона и за это подвергся изгнанію. Его *Геометрія Положенія*, появившаяся въ

---

[1]) Доказательство Бріаншона появилось въ „Mémoire sur les Surfaces courbes du second Degré“ въ Journal de l'École Polytéchnique, T. VI, 297—311, 1806. Оно воспроизведено у *Тэйлора*, цит. соч., p. 290.

1803 г.*), и *Теорія трансверсалей,* въ 1806 г.**), представляютъ собою значительные вклады въ новую плоскую геометрію. Стараясь объяснить значеніе отрицательныхъ количествъ въ геометріи, онъ положилъ основаніе „геометріи положенія“, которая отличается, однако, отъ той, которую издалъ подъ тѣмъ же названіемъ Von Staudt. Онъ нашелъ цѣлый классъ общихъ теоремъ, относящихся къ проективнымъ свойствамъ фигуръ; эта теорія подверглась впослѣдствіи болѣе детальной разработкѣ въ трудахъ Понслэ, Шаля и другихъ.

Jean Victor Poncelet (1788 — 1867), родомъ изъ Метца, принималъ участіе въ походѣ въ Россію и въ кровопролитномъ бою подъ Краснымъ былъ раненъ; считая его убитымъ, французы оставили его на полѣ сраженія, и онъ попалъ въ плѣнъ къ русскимъ, которые отвезли его въ Саратовъ. Тамъ, лишенный книгъ, руководствуясь только своими воспоминаніями о томъ, чему онъ учился въ лицеѣ въ Метцѣ и въ Политехнической школѣ, онъ сталъ изучать математическія науки, начиная съ элементовъ. Подобно Бёніану, онъ написалъ, находясь въ заключеніи, книгу, ставшую знаменитой, *Traité des Propriétés projectives des Figures;* это сочиненіе было впервые опубликовано въ 1822 г. Здѣсь онъ пользуется центральной проекціей и даетъ теорію „взаимныхъ поляръ“. Ему мы обязаны закономъ двойственности, который есть слѣдствіе этой теоріи. Въ качествѣ независимаго принципа установилъ этотъ законъ *Joseph Diaz Gergonne* (1771 — 1859). Мы можемъ упомянуть здѣсь только имена нѣкоторыхъ изъ новѣйшихъ изслѣдователей въ области синтетической геометріи: *Augustus Ferdinand Möbius* (1790 — 1868), *Jacob Steiner* (1796 — 1863), *Michel Chasles*

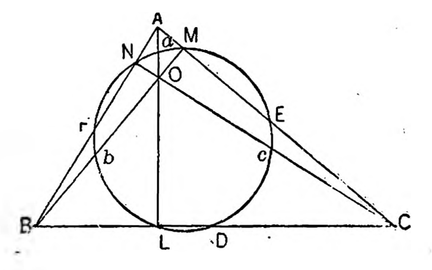
---

*) Géométrie de Position par *L. N. M. Carnot,* Paris, An XI — 1803. *Прим. ред.*

**) Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales (Paris, 1806). Объ этихъ сочиненіяхъ Карно см. *Chasles,* Ch. V, §§ 20, 21, 22. Великолѣпную картину жизни и дѣятельности этого великаго человѣка нарисовалъ Араго; см. Carnot, biographie lue en sénce publique de la'Ac. d. Sc. le 21 Aout 1837, Notices biographiques t. I, Oeuvres complètes de Francois Arago publ. p. Barral, Paris, 1865, t. I, pp. 511 et suiv. *Прим. ред.*

(1793 — 1880), *Karl Georg Christian von Staudt* (1798 – 1867). Шаль ввелъ неудачный терминъ *ангармоническое отношенiе*, соотвѣтствующiй нѣмецкому *Doppelverhältniss* и еще лучшему термину Клиффорда *cross-ratio*. Фонъ Штаудтъ совершенно отказался отъ всякихъ алгебраическихъ формулъ и метрическихъ соотношенiй, въ томъ числѣ и отъ имѣющаго метрическое основанiе двойного отношенiя Штейнера и Шаля, и создалъ затѣмъ геометрiю положенiя, представляющую совершенно законченную науку, независимую отъ всякаго измѣренiя.

II. *Современная геометрiя треугольника и круга.*— Мы не можемъ дать полной исторiи этого предмета, но мы надѣемся возбудить въ широкомъ кругѣ читателей интересъ къ найденнымъ въ послѣднее время свойствамъ треугольника и круга [1]). Въ новѣйшихъ руководствахъ по элементарной геометрiи часто упоминается „кругъ девяти точекъ". Пусть въ треугольникѣ ABC точки D, E, F — средины сторонъ, AL, BM, CN — перпендикуляры къ сторонамъ, a, b, c средины отрѣзковъ AO, BO, CO; черезъ точки L, D, c, E, M, a, N, F, b можно провести кругъ — это и есть „кругъ

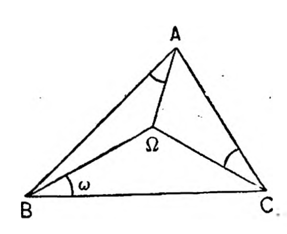


[1]) Мы рекомендуемъ учащимся систематическiй трактатъ по этому предмету, написанный Эммерихомъ: *A. Emmerich.* Die Brocardschen Gebilde, Berlin, 1891. Мы заимствовали приводимыя нами историческiя свѣдѣнiя изъ этой книги и изъ слѣдующихъ статей: *Julius Lange,* Geschichte des Feuerbachschen Kreises, Berlin, 1894; *J. S. Mackay,* History of the nine-point circle, pp. 19 — 57, Early history of the symmedian point, pp. 92 — 104, въ Proceed. of the Edinburgh Math. Soc., Vol. XI, 1892 — 93. См. также *Mackay,* The Wallace line and the Wallace point въ томъ же журналѣ, Vol. IX, 1891, pp. 83 — 91; статью *Лемуана* (E. Lemoine) въ Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Grenoble, 1885; статью *E. Vigarié* тамъ же, Congrès de Paris, 1889. Успѣхи геометрiи треугольника въ 1890 году изложены *Vigarié* въ Progresso mat. I, 101 — 106, 128 — 134, 187 — 190; въ 1891 г. въ Journ. de Math. élém., (4) 1, 7 — 10, 34 — 36. См. также *Casey,* Sequel to Euclid *).

*) См. также *Д. Ефремовъ.* Новая геометрiя треугольника. 1902. Одесса.] *Прим. ред.*

девяти точекъ". По ошибкѣ первое открытіе этого круга приписываютъ Эйлеру [1]). Нѣсколько ученыхъ открыли его независимо другъ отъ друга. Въ Англіи *Benjamin Bevan* предложилъ для доказательства въ *Математическомъ Сборникѣ* Лейборна (Leybourn's *Mathematical Repository*, I, 18, 1804), теорему, дающую въ сущности упомянутый кругъ. Доказательство далъ въ *Repository*, Vol. I, Part 1, p. 143, *John Butterworth*, предложившій еще задачу, которую рѣшилъ, кромѣ него самаго, еще *John Whitley;* какъ видно изъ содержанія этой задачи, имъ было извѣстно, что разсматриваемый кругъ проходитъ черезъ всѣ девять точекъ. Эти девять точекъ упоминаются явно Бріаншономъ и Понслэ въ *Annales de Mathématiques* de Gergonne за 1821 г. Въ 1822 г. *Karl Wilhelm Feuerbach* (1800 — 1834), профессоръ гимназіи въ Эрлангенѣ, опубликовалъ статью, въ которой пришелъ къ кругу девяти точекъ и доказалъ, что онъ касается круга вписаннаго и круговъ внѣвписанныхъ. Нѣмцы назвали его „Фейербаховымъ кругомъ". Многія доказательства характерныхъ его свойствъ даны въ упомянутой выше статьѣ. Послѣднимъ изъ открывшихъ этотъ замѣчательный кругъ, независимо отъ другихъ, является, насколько извѣстно, F. S. Davies, статья котораго объ этомъ предметѣ появилась въ 1827 году въ *Philosophical Magazine*, II, 29 — 31.

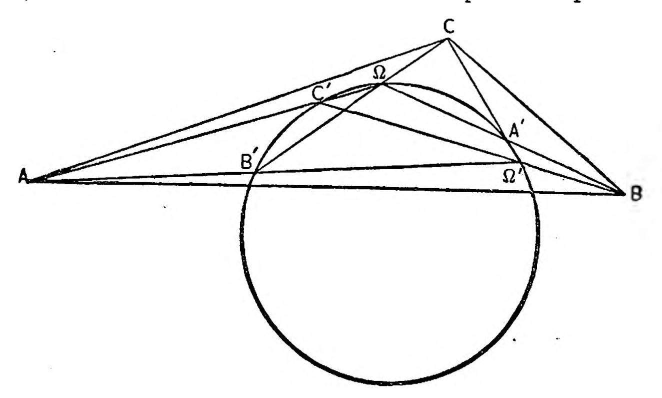
Въ 1816 г. *August Leopold Crelle* (1780 — 1855), основатель математическаго журнала, носящаго его имя, издалъ въ Берлинѣ статью, излагающую нѣкоторыя свойства плоскихъ треугольниковъ. Онъ показалъ, какъ опредѣлить внутри треугольника точку Ω такъ, чтобы углы (взятые въ томъ же порядкѣ) образованные сторонами съ прямыми, соединяющими ее съ вершинами, были бы равны.



Въ прилагаемой фигурѣ три отмѣченныхъ угла равны. Построеніе, дающее равные углы $\Omega' AC = \Omega' CB = \Omega' BA$, приводитъ ко второй точкѣ Ω'. Изученіе свойствъ этихъ

[1]) *Mackay*, op. cit., Vol. XI, p. 19.

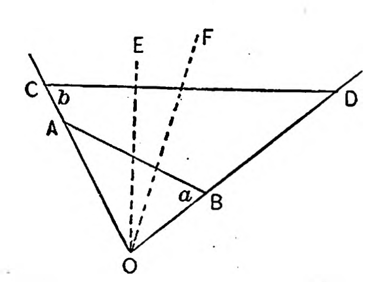
новыхъ угловъ и новыхъ точекъ заставила Крэлле воскликнуть: „Удивительно, въ самомъ дѣлѣ, насколько неистощима по своимъ свойствамъ такая простая фигура, какъ треугольникъ. Какъ много можетъ быть еще неизвѣстныхъ свойствъ другихъ фигуръ!“. Изслѣдованія подобнаго рода производилъ также *C. F. A. Jacobi* изъ Pforta и нѣкоторые изъ его учениковъ, но послѣ его смерти, въ 1855 г., обо всемъ этомъ забыли. Въ 1875 году *H. Brocard* снова обратилъ вниманіе математическаго міра на этотъ предметъ своими изслѣдованіями, начатыми за нѣсколько лѣтъ до этого совершенно самостоятельно. За работой Брокара скоро послѣдовали другія изслѣдованія, появившіяся въ большомъ числѣ во Франціи, Англіи и Германіи. Новыя изысканія привели къ обширному лексикону новыхъ техническихъ терминовъ. Къ сожалѣнію геометры, по именамъ которыхъ названы были нѣкоторые замѣчательные точки, линіи и круги, не всегда были тѣ люди, которые впервые изслѣ-



довали ихъ свойства. Такъ мы говоримъ о „точкахъ Брокара“ и „Брокаровыхъ углахъ“, но историческія изслѣдованія выяснили въ 1884 и 1886 гг. тотъ фактъ, что это именно тѣ точки и линіи, которыя были изслѣдованы Крэлле и К. Ф. А. Якоби. „Кругъ Брокара“ принадлежитъ самому Брокару. Пусть въ треугольникѣ ABC Ω и Ω' — первая и вторая „Брокаровы точки“. Пусть A' точка пересѣченія $B\Omega$ и $C\Omega'$; B'—точка пересѣченія $A\Omega'$ и $C\Omega$; C'—точка пересѣченія $B\Omega'$ и $A\Omega$. Кругъ, проходящій черезъ точки A', B', C' и

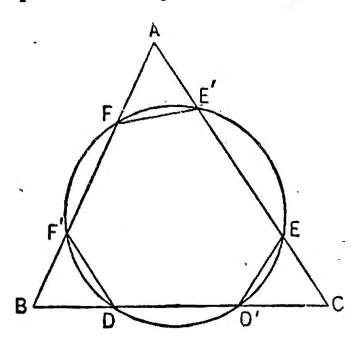
есть „кругъ Брокара“. $A'B'C'$ — „первый треугольникъ Брокара“. Другой такой же треугольникъ $A''B''C''$ называется „вторымъ треугольникомъ Брокара“. Точки A'', B'', C'' вмѣстѣ съ Ω, Ω' и двумя другими точками лежатъ на окружности „Брокарова круга“.

Въ 1873 году *Emile Lemoine* обратилъ вниманіе математиковъ на особую точку внутри плоскаго треугольника, которая впослѣдствіи получила различныя названія и именовалась то „точкой Лемуана“, то „точкой-симмедіаной“ или „точкой Грэбе“. Вмѣстѣ съ тѣмъ были старательно изслѣдованы свойства этой точки и связанныхъ съ нею прямыхъ линій и круговъ. Чтобы привести читателя къ опредѣленію этой точки, мы предположимъ, что линія CD на прилагаемой фигурѣ проведена такъ, что углы a и b равны; въ этомъ случаѣ каждая изъ двухъ линій AB и CD называется *анти-параллелью* другой по отношенію къ углу O[1]). Замѣтимъ далѣе, что прямая OE, дѣлящая пополамъ сторону AB, называется *медіаной*, а прямая OF, дѣлящая анти-параллель AB, называется *симмедіаной* (сокращено изъ symétrique de la médiane). Точка встрѣчи трехъ симмедіанъ треугольника названа Тёккеромъ „точкой-симмедіаной“. Mackay указалъ на то, что нѣкоторыя свойства этой точки, обнародованныя въ послѣднее время, были открыты еще до 1873 г. Анти-параллели треугольника, проходящія черезъ его точку-симмедіану, встрѣчаютъ его стороны въ шести точкахъ, лежащихъ на кругѣ, называемомъ „вторымъ кру-



[1]) Опредѣленіе анти-параллели *Emmerich* (p. 13, прим.) приписываетъ Лейбницу. *E. Stone* въ своемъ Словарѣ (New Mathem. Dict., London, 1743) опредѣляетъ терминъ анти-параллель. Стонъ даетъ приведенное нами опредѣленіе и, ссылаясь на Лейбница (Acta Erudit., 1691, p. 279), приписываетъ ему другое опредѣленіе, отличное отъ вышеприведеннаго. Слово „анти-параллельный“ дано въ словарѣ „*Murray's* New English Dictionary“ (около 1660 г.). См. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. XXII, 1890, p. 45; Nature, XLI, 104 — 105.

гомъ Лемуана". „Первый кругъ Лемуана" есть частный случай „Тёккерова круга"; онъ концентриченъ „Брокарову кругу". „Круги Тёккера" можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Пусть $DF' = FE' = ED'$; пусть, сверхъ того, пары прямыхъ AB и ED', BC и FE', CA и DF' соотвѣтственно антипараллельны: шесть точекъ D, D', E, E', F, F' лежатъ на „Тёккеровомъ кругѣ". Измѣняя длину равныхъ анти-параллелей, мы получимъ различные „Тёккеровы круги". Къ нимъ близки „круги Тэйлора". Къ другимъ типамъ круговъ принадлежатъ „круги Нейберга" и „круги Маккэя". Можетъ быть, мы сказали уже достаточно, чтобы обратить вниманіе читателя на удивительные успѣхи, достигнутые въ геометріи треугольника и круга во второй половинѣ девятнадцатаго столѣтія. Открытіе новыхъ теоремъ въ новѣйшее время покажется намъ еще болѣе замѣчательнымъ, если мы примемъ во вниманіе то, что фигуры эти подвергались уже внимательному разсмотрѣнію какъ со стороны остроумныхъ грековъ, такъ и со стороны длиннаго ряда геометровъ, появившихся послѣ нихъ[1]).



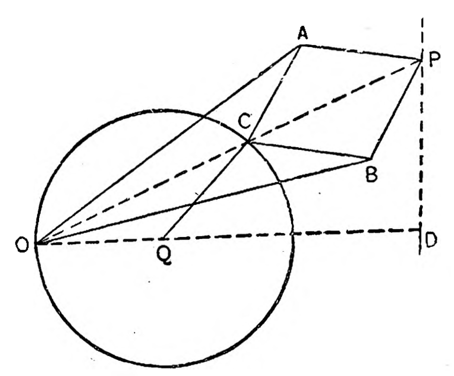
Мы обратимся теперь къ разсмотрѣнію другихъ геометрическихъ изслѣдованій различнаго рода. Интереснымъ, какъ съ практической, такъ и съ теоретической стороны было открытіе прибора для превращенія кругового движенія въ прямолинейное, сдѣланное въ 1864 году А. Поселье (A. Peaucellier), военнымъ инженеромъ во французской арміи [2]) *). Пусть $ACBP$ ромбъ, стороны котораго меньше,

[1]) Болѣе подробное изложеніе изслѣдованій, произведенныхъ по этому предмету въ Англіи, см. въ статьѣ „The Recent Geometry of the Triangle", Fourteenth General Report of A. I. G. T., 1888, pp. 35—46.

[2]) Статьи *Поселье* появились въ Nouvelles Annales въ 1864 и 1873 г.г.

*) Тотъ же приборъ былъ изобрѣтенъ независимо отъ Поселье русскимъ математикомъ Липманомъ Израилевичемъ Липкиномъ (ум. въ 1875 г.) въ 1868 г. Приборъ этотъ описанъ въ статьѣ Ueber eine Gelenkgeradeführung von L. Lipkin (Mélanges mathématiques de l'Académie Impériale a St.-Petersbourg, 1870). *Прим. ред.*

чѣмъ равныя стороны угла AOB. Вообразимъ себѣ, что прямыя линіи, проведенныя на чертежѣ сплошной чертой — суть шесты или рычаги (links), соединенные шарнирами въ точкахъ A, B, C, P, Q, O. Если мы заставимъ C описывать кругъ, то точка P опишетъ прямую линію PD; точка O должна быть при этомъ неподвижной. Если удалить шестъ CQ и заставить C двигаться по какой-нибудь плоской кривой, то P опишетъ кривую, обратную данной по отношенію къ точкѣ O. Дальнѣйшая разработка метода сочлененій Поселье была сдѣлана Сильвестеромъ [1]).



Въ другомъ мѣстѣ мы уже говорили объ инструментахъ, употреблявшихся при геометрическихъ построеніяхъ,— о томъ, какъ греки пользовались линейкой и циркулемъ и какъ потомъ нѣкоторые геометры стали употреблять линейку и циркуль съ опредѣленнымъ растворомъ или одну тольку линейку. Въ связи съ этимъ находится интересная работа итальянца *Lorenzo Mascheroni* (1750 — 1800), озаглавленная *Geometria del compasso,* 1797, въ которой всѣ построенія производятся съ помощью циркуля, но безъ ограниченія раствора циркуля опредѣленнымъ радіусомъ. Авторъ этой книги написалъ ее для механиковъ-практиковъ, считая, что построенія, производимыя съ помощью циркуля, точнѣе тѣхъ, которыя производятся съ помощью линейки [2]). Сочи-

---

[1]) *Sylvester* въ Educ. Times Reprint, Vol. XXI, 58 (1874). См. *C. Taylor,* Ancient and Modern Geometry of Conics, 1881, p. LXXXVII. Ср. также *A. B. Kempe,* How to draw a straight line, a lecture on linkages, London, 1877.

[2]) См. въ *Charles Hutton's* Philos. and Math. Dict., London, 1815, статью „Geometry of the Compasses"; *Marie,* X, p. 98; *Klein,* p. 26; *Steiner,* Gesammelte Werke, I, 463; книга Маскерони была переведена на французскій языкъ въ 1798 г.; *Hutt* издалъ ее въ сокращеніи на нѣмецкомъ языкѣ въ 1880 г.

неніе Маскерони удостоилось вниманія Наполеона Бонапарта, предложившаго французскимъ математикамъ слѣдующую задачу: раздѣлить окружность круга на четыре части съ помощью одного циркуля. Задача эта рѣшается слѣдующимъ построеніемъ: отложимъ радіусъ въ окружности три раза и получимъ дуги AB, BC, CD. Разстояніе AD есть діаметръ. Радіусомъ, равнымъ AC, изъ центровъ A и D опишемъ дуги, пересѣкающіяся въ E. Тогда EO, гдѣ O центръ даннаго круга, будетъ хордой квадранта этого круга.

Построеніе правильнаго вписаннаго 17-ти угольника было выполнено впервые *Карломъ Фридрихомъ Гауссомъ* (1777 — 1855), когда онъ былъ еще юношей девятнадцати лѣтъ, въ Гёттингенскомъ университетѣ, 30 марта 1796 года. Въ это время онъ не рѣшилъ еще, выбрать ли своей спеціальностью древніе языки, или математику. Удачное рѣшеніе задачи о построеніи семнадцатиугольника заставило его рѣшиться посвятить себя математикѣ [1]).

Любопытный способъ построенія былъ указанъ независимо двумя математиками—нѣмцемъ и индусомъ. Можно выполнить геометрическія построенія *складываніемъ бумаги*. *Hermann Wiener* въ 1893 году показалъ, какъ строить посредствомъ складыванія сѣтки правильныхъ многранниковъ. Въ томъ же году *Sundara Row* издалъ небольшую книжку „О складываніи бумаги" („On paper folding", Macmillan and Co), въ которой показано, какъ строить сколько угодно точекъ эллипса, циссоиды и т. д.[2]) *).

Говоря о многогранникахъ, слѣдуетъ упомянуть объ интересной теоремѣ, состоящей въ томъ, что число реберъ на двѣ единицы меньше числа всѣхъ вершинъ и граней,

---

[1]) Другіе способы вписыванія 17-ти угольника даны были *Фонъ Штаудтомъ* въ журналѣ Crelle, 24 (1842), *Шрётеромъ* (*Schröter* — Crelle, 75, 1872). Шрётеръ пользовался при этомъ линейкой и однимъ растворомъ циркуля. Съ помощью одного циркуля задача эта еще не рѣшена. См. *Klein*, p. 27; построеніе семнадцатиугольника дано также въ сочиненіи *Paul Bachmann*, Kreistheilung, Leipzig, 1872, p. 67.

[2]) *Klein*, p. 33.

*) Есть и русскій переводъ книги Row: „Роу, Сундара. Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги". Одесса, „Mathesis". *Прим. ред.*

взятыхъ вмѣстѣ. Эта теорема приписывается обыкновенно Эйлеру, но была найдена уже Декартомъ [1]). Она вѣрна только для такихъ многогранниковъ, каждая грань которыхъ имѣетъ лишь одну границу; если поставить кубъ на другой кубъ большаго размѣра, тогда верхняя грань большого куба будетъ ограничена двумя линіями, и теорема не будетъ имѣть мѣста для такого многогранника. *F. Lippich* нашелъ болѣе общую теорему [2]).

III. *Не-Евклидова геометрія.*—Исторія этого предмета сосредоточивается почти исключительно на теоріи параллельныхъ линій. Прежде, чѣмъ перейти къ разбору различныхъ системъ не-Евклидовой геометріи, полезно будетъ разсмотрѣть различныя попытки упростить и усовершенствовать теорію параллельныхъ линій; попытки эти были двоякаго рода: авторы ихъ 1) давали новыя опредѣленія параллельныхъ линій, или принимали новые постулаты, отличные отъ Евклидова постулата о параллельныхъ линіяхъ, 2) старались вывести этотъ постулатъ изъ самой природы прямой линіи и плоскаго угла.

Евклидово опредѣленіе: *параллельныя прямыя суть тѣ, кои, будучи на той же плоскости, и продолженныя въ обѣ стороны безпредѣльно, нигдѣ взаимно не встрѣчаются* *), еще и теперь остается лучшимъ опредѣленіемъ для цѣлей элементарной геометріи. Первымъ писателемъ, предложившимъ новое опредѣленіе, былъ, насколько извѣстно, нѣмецкій живописецъ *Albrecht Dürer*. Онъ написалъ геометрію, напечатанную въ первый разъ въ 1525 году, въ которой говорится, что *параллельныя линіи—это линіи, равноотстоящія другъ отъ друга на всемъ своемъ протяженіи* [3]). Нѣ-

---

[1]) См. *E. de Jonquières* въ Biblioth. Mathem., 1890, p. 43.

[2]) *Lippich*, „Zur Theorie der Polyeder", Sitz.-Ber. d. Wien. Akad., Bd. 84, 1881; см. также *H. Durège*, Theorie der Funktionen, Leipzig, 1882, p. 226; существуетъ англійскій переводъ этой книги; его сдѣлали *G. E. Fisher* и *I. J. Schwatt*.

*) *Евклидовыхъ началъ* восемь книгъ, пер. *Ѳ. Петрушевскаго*, стр. 4, книга I, опр. 35. *Euclidis Elementa*, ed. *Heiberg*, Vol. I, Lips. 1883, p. 8, Lib. I, Def. XXIII. *Прим. ред.*

[3]) *S. Günther*, Math. Unt. im d. Mittelalt., pp. 361, 362.

сколько позднѣе *Clavius* въ своемъ изданіи Евклида 1574 г. въ примѣчаніи принимаетъ, что линія, на всемъ своемъ протяженіи равноотстоящая отъ прямой, тоже есть прямая. Этотъ постулатъ содержится въ скрытомъ видѣ и въ опредѣленіи Дюрера. Противъ этого опредѣленія или постулата можно возразить, что это *теорема* высшаго порядка, которая предполагаетъ трудныя соображенія объ измѣреніи, обнимающія всю теорію несоизмѣримыхъ величинъ. Кромѣ того, съ этой теоремой приходится разстаться, становясь на болѣе общую точку зрѣнія на начала геометріи [1]). Теорію параллельныхъ Клавія приняли также *Jacques Peletier* (1517 — 1582) изъ Парижа, *Ruggiero Guiseppe Boscovich* (1711 — 1787) [2]), *Johann Christian Wolf* (1679 — 1754) изъ Галле, *Thomas Simpson* (въ первомъ своемъ изданіи Началъ, 1747 г.), *John Bonnycastle* (1750? — 1821) изъ Королевской Военной Академіи въ Вуличѣ и другіе. Такъ же излагали параллельныя линіи и нѣкоторые американскіе авторы [3]). *E. Stone* въ своемъ словарѣ (*New Mathematical Dictionary*, London, 1743) приводитъ нѣсколько опредѣленій параллельныхъ линій; первое мѣсто между ними занимаетъ опредѣленіе Дюрера; да и „въ большинствѣ руководствъ по элементарной геометріи, отъ шестнадцатаго столѣтія до начала восемнадцатаго, параллельныя линіи опредѣляются, какъ линіи, равноотсто-

---

[1]) *Lobatchewsky,* The Theory of Parallels, transl. by *G. B. Halsted* *), Austin, 1891, p. 21, гдѣ доказана теорема, въ силу которой въ псевдосферическомъ пространствѣ, „чѣмъ дальше параллельныя линіи продолжаются въ сторону ихъ параллелизма, тѣмъ болѣе онѣ сближаются“.

*) Эта статья была написана Лобачевскимъ на нѣмецкомъ языкѣ и выпущена отдѣльнымъ изданіемъ подъ заглавіемъ: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Porallellinien“. Статья эта помѣщена также во II томѣ „Полнаго собранія сочиненій Лобачевскаго по геометріи“. Цитируемое мѣсто находится на стр. 560 указаннаго тома.

Прим. ред.

[2]) Босковичъ былъ профессоромъ въ нѣсколькихъ итальянскихъ университетахъ, занималъ различныя ученыя должности при нѣсколькихъ папахъ, былъ въ Лондонѣ въ 1762 г.; Королевское Общество указало на него, какъ на лицо, котораго слѣдовало бы назначить для наблюденія прохожденія Венеры *въ Калифорніи,* но упраздненіе Іезуитскаго ордена, въ который онъ вступилъ, помѣшало ему принять это назначеніе. Ср. Penny Cyclopaedia.

[3]) Ср. Teach. and. Hist. of Math. in the U. S., p. 377.

ящія другъ отъ друга,—что, безъ сомнѣнія очень удобно" [1]). Но скоро появились возраженія противъ такого способа изложенія теоріи параллельныхъ линій. Еще въ 1680 году *Giordano da Bitonto,* въ Италіи, призналъ его недопустимымъ, если только не установлено дѣйствительное существованіе прямыхъ линій, равноотстоящихъ другъ отъ друга. *Saccheri* безъ всякихъ церемоній отвергаетъ это допущеніе [2]).

Другое опредѣленіе, содержащее въ себѣ скрытое допущеніе, гласитъ, что параллельныя линіи—это *линіи, составляющія равные углы съ третьей линіей.* Это опредѣленіе, повидимому, появилось впервые во Франціи; его предложили *Pierre Varignon* (1654 — 1722) и *Étienne Bézout* (1730 — 1783), оба изъ Парижа. Въ Англіи имъ пользовался Cooley [3]), въ Соединенныхъ Штатахъ — H. N. Robinson. Незначительное видоизмѣненіе этого опредѣленія представляетъ слѣдующее. *Параллельныя линіи суть линіи перпендикулярныя къ третьей.* Это опредѣленіе предложено итальянцемъ G. A. Borelli въ 1658 г. и знаменитымъ авторомъ французскихъ руководствъ по математикѣ *S. F. Lacroix* [4]).

Большою извѣстностью пользуется опредѣленіе: *параллельныя линіи — это прямыя, имѣющія одно и то же направленіе.* Это опредѣленіе привлекаетъ насъ сначала своей простотой. Но, чѣмъ больше мы его изучаемъ, тѣмъ труднѣе и запутаннѣе являются вопросы, которые оно возбу-

---

[1]) *Engel* и *Stäckel,* p. 33.

[2]) *Engel* и *Stäckel,* p. 46.

[3]) „*Миносъ:* Насколько я могу понять, Mr. Cooley спокойно принимаетъ за положеніе, что пара линій, образующихъ равные углы съ *одной* линіей, образуютъ равные же углы и со *всѣми* линіями. Онъ могъ бы съ такимъ же правомъ сказать, что молодая дѣвица, имѣющая склонность къ одному молодому человѣку, равнымъ и подобнымъ же образомъ склонна и ко *всѣмъ* молодымъ людямъ! *Радамантъ:* Во всякомъ случаѣ она могла бы стараться одинаково склонить ихъ всѣхъ къ себѣ" *). *C. L. Dodgson,* Euclid and His Modern Rivals, London, 1885, 2d Ed., p. 2; также p. 62.

*) Въ подлинникѣ непереводимая игра словъ: to be inclined — значитъ „быть наклоненнымъ" и „питать склонность"; angle — „уголъ" и „удочка"; to make angling — „ловить на удочку". *Прим. ред.*

[4]) *S. F. Lacroix,* Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier, Paris, 1805, p. 317.

ждаетъ. Довольно странно, что авторы, принимающіе это опредѣленіе, не встрѣчаютъ никакихъ затрудненій при дальнѣйшемъ изложеніи теоріи параллельныхъ линій; нигдѣ не встрѣчаютъ они необходимости принимать Евклидовъ постулатъ о параллельныхъ линіяхъ или другой какой-нибудь равносильный ему постулатъ. Вопросъ, который приводилъ въ смущеніе геометровъ въ теченіе многихъ столѣтій, оказывается разрѣшеннымъ въ одинъ мигъ! Въ дѣйствительности слово „направленіе", кажущееся простымъ, въ сущности неопредѣленно и темно; ни одинъ математическій терминъ не вводилъ въ заблужденіе столько умныхъ и способныхъ математиковъ, сколько это слово. Въ Соединенныхъ Штатахъ, какъ и въ другихъ странахъ, упомянутое нами опредѣленіе параллельныхъ линій было широко распространено; его слѣдуетъ, однако, въ интересахъ здравыхъ принциповъ науки, изгнать навсегда изъ руководствъ по геометріи [1]).

Новое опредѣленіе, подсказанное началомъ непрерывности и очень полезное въ высшей геометріи, хотя и не пригодное для цѣлей элементарнаго преподаванія, было дано впервые Іоганномъ Кеплеромъ (1604) и Жираромъ Дезаргомъ (1639): линіи параллельны, если онѣ имѣютъ общую безконечно удаленную точку. Подобную же идею выразилъ Э. Стонъ въ своемъ словарѣ слѣдующимъ образомъ: „Если A — точка, лежащая внѣ данной неограниченной прямой линіи CD, то кратчайшая линія AB, которую можно про-

[1]) Возраженія противъ термина „направленіе" выставлялись такъ часто и съ такимъ искусствомъ, что намъ остается только сослаться на нѣсколько статей, написанныхъ по этому поводу: рефератъ *Де Моргана* о геометріи Дж. М. Вильсона, Athenaeum, July, 18, 1868; *E. L. Richards* въ Educational Review, Vol. III, 1892, p. 32; Seventh General Report (1891) A. I. G. T., pp. 36—42; *G. B. Halsted*, The Science Absolute of Space by *John Bolyai*, 4th Ed., 1896, pp. 63 — 71; *G. B. Halsted* въ Educational Review, Sept., 1893, p. 153; *C. L. Dodgson*, Euclid and His Modern Rivals, London; *H. Müller*, Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Metz, 1889, p. 7; Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Teubner in Leipzig, XVI, p. 407; Teach. and Hist. of Math. in the U. S., pp. 381 — 383; Monist, 1892 (Рефератъ о книгѣ *Э. Т. Диксона* „Foundations of Geometry").

вести изъ точки A къ линіи CD, перпендикулярна къ ней, длиннѣйшая же EA ей параллельна".

Немалое число постулатовъ, отличающихся отъ Евклидова постулата только по формѣ, а не по существу, было предложено въ разныя времена вмѣсто постулата Евклида. Вечеромъ 11 іюля 1663 года *Джонъ Валлисъ* прочелъ въ Оксфордѣ лекцію о постулатѣ параллельныхъ линій [1]). Онъ предлагаетъ замѣнить Евклидовъ постулатъ слѣдующимъ: *Можно начертить треугольникъ какихъ угодно размѣровъ, подобный всякому данному треугольнику. Saccheri* показалъ, что можно строго развить Евклидову геометрію, допустивъ существованіе одного треугольника, подобнаго другому, но не равнаго єму. Подобныя же замѣчанія были сдѣланы Ламбертомъ. Л. Карно и Лапласъ снова предложили принять постулатъ Валлиса; въ новѣйшее время онъ былъ предложенъ Делбёфомъ (J. Delbœuf) [2]). *Alexis Claude Clairaut* (1713 — 1765), знаменитый французскій математикъ, написалъ элементарную геометрію, въ которой онъ *допускаетъ существованіе прямоугольника* и, замѣнивъ этимъ допущеніемъ Евклидовъ постулатъ, доказываетъ съ большою ясностью элементарныя теоремы. Другими эквивалентами Евклидова постулата являются слѣдующіе: черезъ всякія три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести кругъ (постулатъ, принадлежащій W. Bolyai); существованіе конечнаго треугольника, сумма угловъ котораго равна двумъ прямымъ (принадлежащій Лежандру); черезъ каждую точку внутри угла можно провести прямую, пересѣкающую обѣ стороны его (постулатъ Лоренца [J. F. Lorenz, 1791] и Лежандра); во всякомъ кругѣ вписанный равносторонній четырехуголь-

---

[1]) См. Opera, Vol. II, 665 — 678. Въ нѣмецкомъ переводѣ у *Энгеля* и *Штекеля*, pp. 21 — 30 *).

*) VIII. Praesumo tandem (ex praesupposita Rationum natura tanquam cognita, & Figurarum Similium definitione) ut communem notionem, *Datae cuicunque Figurae, Similem aliam cujuscunque magnitudinis possibilem esse.* Hoc enim (propter quantitates continuas in infinitum divisibiles, pariter atque in infinitum augibiles) videtur ex ipsa Quantitatis natura fluere; figuram scilicet quamlibet continue posse (retenta figurae specie) tum minui, tum augeri in infinitum. *J. Wallis.* Opera, V. II, p. 676.

Прим. ред.

[2]) *Engel* и *Stäckel,* p. 19.

никъ больше каждаго изъ сегментовъ, лежащихъ внѣ его (C. L. Dodgson); двѣ пересѣкающіяся прямыя не могутъ быть параллельны одной и той же прямой (John Playfair) [1]). Изъ всѣхъ этихъ постулатовъ только послѣдній заслужилъ всеобщее одобреніе. Плэйфэръ принялъ его въ своемъ изданіи Евклида, и всѣ признали, что этотъ постулатъ проще Евклидова постулата о параллельныхъ линіяхъ.

До конца первой четверти девятнадцатаго вѣка среди математиковъ была широко распространена вѣра въ то, что Евклидовъ постулатъ можетъ быть *доказанъ* на основаніи другихъ допущеній и опредѣленій геометріи. Мы уже упомянули о попыткахъ такого рода доказательства, сдѣланныхъ Птолемеемъ и Насиръ Эддиномъ. Мы воздержимся отъ подробнаго разбора такихъ доказательствъ. Они всѣ оказались неудачными, или потому, что опираются на допущенія, равносильныя Евклидову постулату, или потому, что основаны на разсужденіяхъ, неправильныхъ въ другихъ отношеніяхъ. На этой скользкой почвѣ падали равнымъ образомъ какъ хорошіе, такъ и плохіе математики. Разсказываютъ, что великій Лагранжъ, замѣтивъ, что формулы сферической тригонометріи не зависятъ отъ постулата параллельныхъ линій, надѣялся обосновать на этомъ фактѣ Евклидовъ постулатъ. Въ концѣ своей жизни онъ написалъ мемуаръ о параллельныхъ линіяхъ; начавъ чтеніе его передъ Академіей наукъ, онъ вдругъ остановился и сказалъ: „Il faut que j'y songe encore“ [2]) (я долженъ еще подумать объ этомъ), спряталъ свои бумаги въ карманъ и никогда больше не упоминалъ публично о своемъ мемуарѣ.

Интересны изслѣдованія *Лежандра* (*Adrien Marie Legendre*, 1752 — 1833). Замѣтивъ, что Евклидовъ постулатъ равносиленъ теоремѣ о томъ, что сумма угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, онъ далъ аналитическое доказательство этой теоремы, которое основано, однако, на допущеніи существованія подобныхъ фигуръ. Лежандръ не удовлетворился этимъ. Допуская, что прямыя могутъ быть неопредѣленно продолжены, онъ доказалъ впослѣдствіи,

---

[1]) Cp: *G. B. Halsted's* Bolyai; 4th Ed, pp. 64, 65.

[2]) *Engel* и *Stäckel*, p. 212.

что сумма угловъ треугольника не можетъ быть больше двухъ прямыхъ; но ему не удалось доказать, что она не можетъ быть и меньше двухъ прямыхъ. Въ 1823 году въ двѣнадцатомъ изданіи своей *Элементарной Геометріи (Éléments de Géométrie)* онъ далъ, какъ ему казалось, доказательство второй части предложенія. Впослѣдствіи, однако, онъ замѣтилъ слабость этого доказательства, опиравшагося на новое допущеніе: черезъ всякую точку внутри угла можно провести прямую, пересѣкающую обѣ стороны угла. Въ 1833 году онъ опубликовалъ свою послѣднюю статью о параллельныхъ линіяхъ, въ которой онъ совершенно правильно доказываетъ, что, если есть хоть одинъ треугольникъ, сумма угловъ котораго равна двумъ прямымъ, то то же равенство должно быть вѣрнымъ и для всѣхъ треугольниковъ. Но слѣдующій сдѣланный имъ шагъ — попытка строго доказать дѣйствительное существованіе такого треугольника — оказался неудачнымъ, хотя онъ самъ и полагалъ, что окончательно рѣшилъ весь этотъ вопросъ [1]). По правдѣ сказать, онъ остался даже позади Саккери, жившаго за сто лѣтъ до него [2]). Къ тому же, еще до опубликованія послѣдней статьи Лежандра одинъ русскій математикъ рѣшился сдѣлать шагъ, далеко оставляющій за собою по смѣлости и важности все, что достигнуто было по этому вопросу Лежандромъ.

---

[1]) Новая попытка доказать теорему о равенствѣ двумъ прямымъ суммы угловъ треугольника была сдѣлана въ 1813 г. Джономъ Плэйфэромъ въ его книгѣ Elements of Geometry. См. изданіе 1855 г, Philadelphia, pp. 295, 296. Доказательство Плэйфэра состоитъ, вкратцѣ, въ томъ, что къ одной изъ сторонъ фигуры прикладывается прямая, которая вращается затѣмъ такъ, что совпадаетъ послѣдовательно со всѣми сторонами. Затѣмъ утверждается, что прямая описала углы, сумма которыхъ равна четыремъ прямымъ. Тотъ же способъ разсужденія приводитъ къ доказательству того, что сумма угловъ сферическаго треугольника равна двумъ прямымъ, что, какъ извѣстно, не вѣрно. Слѣдуетъ пожалѣть о томъ, что *два* только-что выпущенныхъ въ свѣтъ американскихъ руководства воспроизвели это разсужденіе и дали, такимъ образомъ, новую жизнь этой знаменитой ереси. Объясненіе ложности этого разсужденія см. въ 4-мъ изданіи *Bolyai's* Science Absolute of Space *Г. Б. Хальстеда,* pp. 63—71; Nature, Vol. XXIX, 1884, p. 453.

[2]) *Engel* и *Stäckel,* pp. 212, 213.

Что произошло съ задачей о квадратурѣ круга, то же случилось и съ доказательствомъ постулата о параллельныхъ линіяхъ: послѣ того, какъ многіе изъ лучшихъ умовъ совершили безчисленное множество неудачныхъ попытокъ рѣшить этотъ трудный вопросъ, нѣкоторые проницательные мыслители стали подозрѣвать, что постулатъ и не можетъ быть доказанъ. Въ различныхъ сочиненіяхъ проявляется такого рода скептицизмъ [1]).

Если со стороны Евклида нужна была большая смѣлость, чтобы помѣстить среди другихъ постулатовъ и общепринятыхъ положеній постулатъ о параллельныхъ линіяхъ, такъ мало похожій на аксіому, то нужна была еще большая смѣлость, чтобы отвергнуть постулатъ, который въ теченіе двухъ тысячъ лѣтъ былъ краеугольнымъ камнемъ зданія геометріи. И все же нѣкоторые мыслители восемнадцатаго и девятнадцатаго столѣтія проявили эту независимость мысли, столь необходимую для великихъ открытій.

Пока Лежандръ все еще старался установить справедливость постулата параллельныхъ линій съ помощью строгаго доказательства, *Николай Ивановичъ Лобачевскій* (1793 — 1856) опубликовалъ работу, въ основаніе которой положено допущеніе, находящееся въ противорѣчіи съ этой аксіомой. Лобачевскій обнародовалъ впервые свои взгляды на основанія геометріи въ рѣчи, произнесенной передъ физико-математическимъ факультетомъ Казанскаго университета (въ которомъ онъ былъ тогда ректоромъ) и напечатанной въ первый разъ въ *Казанскомъ Вѣстникѣ* за 1829 г., а затѣмъ въ *Ученыхъ Запискахъ Казанскаго Университета* въ 1836 — 1838 г.г. подъ заглавіемъ „Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ". Это сочиненіе, написанное на русскомъ языкѣ, не только осталось неизвѣстнымъ иностранцамъ, но и въ Россіи не обратило на себя никакого вниманія. Въ 1840 г. онъ издалъ въ Берлинѣ краткое изложеніе своихъ изслѣдованій. Отличительной чертой этой „Воображаемой Геометріи" Лобачевскаго является то положеніе, въ силу котораго черезъ одну

[1]) *Engel* и *Stäckel*, pp. 140, 141, 213 — 215.

точку можно провести на плоскости неограниченное число прямыхъ, ни одна изъ которыхъ не пересѣкаетъ данной прямой, лежащей на той же плоскости, а также, что сумма угловъ треугольника перемѣнна, хотя и остается всегда меньшей, чѣмъ два прямыхъ угла [1]).

Подобная же система геометріи была придумана венгерскими математиками Больэ и названа ими „абсолютной геометріей". *Wolfgang Bolyai de Bolya* (1775—1856) учился въ университетѣ въ Іенѣ, а затѣмъ въ Гётингенѣ, гдѣ сошелся близко съ молодымъ Гауссомъ. Впослѣдствіи онъ сдѣлался профессоромъ реформатской коллегіи въ Maros-Vásárhely, гдѣ въ теченіе сорока семи лѣтъ училось у него большинство лицъ, состоящихъ теперь профессорами въ Трансильваніи. Онъ носилъ костюмъ земледѣльца старыхъ временъ и былъ въ частной своей жизни такъ же оригиналенъ, какъ въ образѣ своихъ мыслей. Онъ былъ чрезвычайно скроменъ. На могилѣ его, говорилъ онъ, не должно быть никакого памятника, кромѣ яблони, въ память о трехъ яблокахъ: о двухъ яблокахъ Евы и Париса, которыя превратили землю въ адъ, и о яблокѣ Ньютона, которое возвысило землю, введя ее снова въ кругъ небесныхъ тѣлъ [2]). Его сынъ *Іоганнъ Больэ* (1802—1860) готовился къ военной службѣ и прославился, какъ глубокій математикъ, страстный любитель игры на скрипкѣ и опытный фехтовальщикъ. Онъ принялъ однажды вызовъ тринадцати офицеровъ съ тѣмъ условіемъ, что послѣ каждой дуэли ему будетъ позволено поиграть на скрипкѣ, и побѣдилъ всѣхъ своихъ противниковъ [3]).

---

[1]) Теорію параллельныхъ *Лобачевскаго* перевелъ на англійской языкъ *G. B. Halsted*, Austin, 1891. Она помѣщается вся лишь на сорока страницахъ. Г. Б. Хальстедъ перевелъ также рѣчь профессора *Васильева* о жизни и дѣятельности Лобачевскаго, Austin, 1894.

[2]) *F. Schmidt*, „Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya", *Grunert's* Archiv der Mathematik und Physik", 48:2, 1868.

[3]) Дополнительныя біографическія подробности см. въ переводѣ *Г. Б. Хальстеда John Bolyai's* The Science Absolute of Space, 4th Ed, 1896. Д-ръ Хальстедъ собирается издать The Life of Bolyai, книгу, содержащую автобіографію Bolyai Farkas (Вольфганга Больэ) и другія интересныя свѣдѣнія.

Главный математическій трудъ Вольфганга Больэ, *Tentamen*, появился въ двухъ томахъ въ 1832 — 1833 г.г. За первымъ томомъ слѣдуетъ приложеніе, написанное его сыномъ Іоганномъ объ *Абсолютной наукѣ о пространствѣ* (Appendix Scientiam Spatii absolute veram exhibens). Двадцать шесть страницъ этой статьи обезсмертили имя Іоганна Больэ. И, однако, въ теченіе тридцати шести лѣтъ это приложеніе, какъ и изслѣдованія Лобачевскаго, было почти въ полномъ забвеніи. Наконецъ, Рихардъ Бальтцеръ изъ Гиссена въ 1867 году обратилъ вниманіе математиковъ на эти удивительные труды. Въ 1894 году на могилѣ Іоганна Больэ въ Maros-Vásárhely, находившейся много лѣтъ въ пренебреженіи, былъ воздвигнутъ каменный монументъ. Въ 1893 — 1895 годахъ былъ образованъ фондъ имени Лобачевскаго изъ пожертвованій ученыхъ всѣхъ странъ, одна часть котораго была предназначена для выдачи международныхъ премій за изслѣдованія въ области геометріи, а другая для постановки бюста Лобачевскаго въ паркѣ, находящемся передъ зданіемъ университета въ Казани.

Но русскій и венгерскій математики не были единственными учеными, которымъ пришла въ голову мысль о новой геометріи. Когда Гауссъ увидѣлъ *Tentamen* старшаго Больэ, своего прежняго сожителя въ Гёттингенѣ, онъ былъ удивленъ, найдя тамъ разработку того, надъ чѣмъ онъ самъ началъ работать уже давно; работа эта была найдена послѣ смерти въ его бумагахъ. Его письма показываютъ, что въ 1799 году онъ еще старался *доказать a priori* вѣрность Евклидовой системы, но впослѣдствіи онъ убѣдился въ томъ, что это невозможно. Многіе авторы, въ особенности нѣмцы, допускаютъ, что какъ Лобачевскій, такъ и Больэ находились подъ вліяніемъ Гаусса и пользовались его поддержкой, но никто еще не представилъ доказательствъ справедливости такого мнѣнія [1].

Новѣйшія историческія изслѣдованія показали, что теоріи Лобачевскаго и Больэ были отчасти предвосхищены

---

[1]) *Engel* и *Stäckel*, pp. 242, 243; *G. B. Halsted*, въ Science, Sept. 6, 1895.

двумя писателями восемнадцатаго вѣка — *Іеронимомъ Саккери* (*Geronimo Saccheri,* 1667 — 1733), іезуитскимъ патеромъ изъ Милана, и *Іоганномъ Генрихомъ Ламбертомъ* (*Johann Heinrich Lambert*, 1728 — 1777), родомъ изъ Мюльгаузена въ Эльзасѣ. Оба они произвели изысканія, содержащія опредѣленія трехъ родовъ пространства, составляющихъ предметы изслѣдованія трехъ родовъ геометріи, называемыхъ теперь не-Евклидовой, сферической и Евклидовой [1]).

Мы коснулись вопроса о не-Евклидовой геометріи, потому что относящіяся къ ней изслѣдованія проливаютъ большой свѣтъ на основанія геометріи. Благодаря этимъ изслѣдованіямъ ни одинъ образованный авторъ элементарныхъ руководствъ не будетъ теперь пытаться сдѣлать то, что обыкновенно пытались сдѣлать прежде: *доказать постулатъ о параллельныхъ линіяхъ*. Мы знаемъ, наконецъ, что такія попытки тщетны. Кромѣ того, для того, кто смотритъ глазами Лобачевскаго и Больэ, легко обнаруживается ошибочность многихъ способовъ разсужденія. Мы обладаемъ теперь англійскими переводами сочиненій этихъ математиковъ, составившихъ эпоху въ исторіи науки, и ни одинъ преподаватель высшей школы или коллегіи, заботящійся о

---

[1]) Изслѣдованія Валлиса, Саккери и Ламберта, вмѣстѣ съ полной исторіей теоріи параллельныхъ линій до Гаусса, даны у *Энгеля* и *Штекеля*. См. также *G. B. Halsted,* „The non-Euclidean Geometry inevitable" въ журналѣ Monist, July, 1894. Недостатокъ мѣста препятствуетъ намъ излагать позднѣйшую исторію не-Евклидовой геометріи. Мы рекомендуемъ нашимъ читателямъ Хальстедовы переводы Лобачевскаго и Больэ. Удивительная диссертація Георга Фридриха Бернгарда Римана, напечатанная въ 1857 году подъ заглавіемъ Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, переведена Клиффордомъ (W. K. Clifford) въ Nature, Vol. 8, pp. 14—17, 36—37. Риманъ развилъ понятіе о величинѣ *и* измѣреній. Лекція Гельмгольца, подъ заглавіемъ „Происхожденіе и значеніе геометрическихъ аксіомъ", содержится въ его книгѣ „Популярныя лекціи о научныхъ предметахъ" (Popular Lectures on Scientific Subjects, translated by *E. Atkinson,* New York, 1881). Ср. также сочиненія Клиффорда. Библіографія не-Евклидовой геометріи и гиперпространства дана *Г. Б. Хальстедомъ* въ American Journal of Mathematics, Vols. I и II. Читателя можетъ заинтересовать книга Flatland, a Romance of Many Dimensions, изданіе Roberts Brothers, Boston, 1885.

совершенствованіи своего дѣла, а тѣмъ болѣе ни одинъ авторъ руководствъ по геометріи не имѣетъ права не знать результатовъ, достигнутыхъ Лобачевскимъ и Больэ.

IV. *Руководства по элементарной геометріи.* — Исторія развитія геометрическихъ руководствъ шла различными путями въ разныхъ странахъ Европы. Въ тѣ времена, когда Евклидъ былъ переведенъ съ арабскаго языка на латинскій, къ книгѣ этой стали питать такое почтеніе, что считалось кощунствомъ измѣнять въ ней что-либо. Съ большимъ еще почтеніемъ относились тогда къ Аристотелю. Такъ, мы читаемъ о томъ, что *Петру Рамусу* (*La Ramée,* 1515—1572) было запрещено, подъ страхомъ тѣлеснаго наказанія, учить или писать противъ Аристотеля. Этотъ королевскій приказъ заставилъ Рамуса посвятить себя изученію математики; онъ выпустилъ въ свѣтъ изданіе Евклида, при чемъ снова обнаружилъ смѣлую независимость своего ума. Онъ относился неодобрительно къ изслѣдованіямъ объ основаніяхъ геометріи; онъ считалъ, что вовсе не желательно выводить всѣ предложенія изъ немногихъ аксіомъ; то, что очевидно само по себѣ, не нуждается въ доказательствѣ. Его мнѣніямъ о математическихъ вопросахъ придавали большое значеніе. Авторы французскихъ учебниковъ руководились его взглядами на основы геометріи вплоть до девятнадцатаго столѣтія. Ни въ какой другой цивилизованной странѣ не уважали такъ мало Евклида, какъ во Франціи. Хорошій примѣръ мнѣній французовъ объ этомъ предметѣ доставляетъ намъ руководство, написанное *Клэро (Alexis Claude Clairaut)* въ 1741 году. Онъ осуждаетъ обиліе самоочевидныхъ предложеній. „Не удивительно“, говоритъ онъ въ своемъ предисловіи, „что Евклидъ давалъ себѣ трудъ доказывать, что два пересѣкающіеся круга не имѣютъ общаго центра; что сумма сторонъ треугольника, расположеннаго внутри другого треугольника, меньше суммы сторонъ этого послѣдняго. Этому геометру приходилось убѣждать упрямыхъ софистовъ, которые гордились отрицаніемъ самыхъ очевидныхъ истинъ . . .; но въ наше время положеніе вещей измѣнилось; всѣ разсужденія о томъ, что заранѣе рѣшается простымъ здравымъ смысломъ, представляютъ теперь лишь напрасную

потерю времени и служатъ только къ тому, чтобы затемнить истину и внушить читателю отвращеніе“ [1]). Подобныхъ же взглядовъ держался *Étienne Bézout* (1730 — 1783), труды котораго по геометріи страдаютъ, какъ и труды Клэро, недостаткомъ строгости. Нѣсколько болѣе правильными были воззрѣнія *Лакруа* (*Sylvestre François Lacroix*, 1765 — 1843). Но изъ всѣхъ французскихъ руководствъ по геометріи наибольшимъ успѣхомъ какъ у себя дома, такъ и въ другихъ странахъ, пользовалось руководство *Лежандра*, изданное впервые въ 1794 г. Интересно привести оцѣнку началъ геометріи *(Éléments de géométrie)* Лежандра, сдѣланную Лоріа [2]): „Они заслужили это [успѣхъ], такъ какъ, поскольку рѣчь идетъ о *формѣ*, они, соперничая съ Евклидомъ въ ясности и точности изложенія, превосходятъ его той сложной гармоніей, которая даетъ имъ видъ прекраснаго зданія, раздѣленнаго на двѣ симметрическія части, предназначенныя: одна — для геометріи на плоскости, другая — для геометріи въ пространствѣ; что же касается *содержанія*, то онѣ богаче Евклида количествомъ матеріала и превосходятъ его въ нѣкоторыхъ частностяхъ. Но великій французскій аналистъ, составляя геометрію, не могъ забыть о любимомъ предметѣ своихъ занятій, благодаря чему въ его рукахъ геометрія сдѣлалась вассаломъ ариѳметики, у которой онъ заимствовалъ нѣсколько способовъ разсужденія и даже нѣкоторыя названія; изъ области ариѳметики взялъ онъ также всю теорію пропорцій. Если прибавить къ этому, что, тогда какъ Евклидъ избѣгаетъ употребленія фигуръ, построеніе которыхъ неизвѣстно читателю, Лежандръ съ спокойной совѣстью пользуется такъ называемыми гипотетическими построеніями, и что онъ отдалъ предпочтеніе неудачному опредѣленію прямой линіи [которымъ пользовался, къ тому же, даже и Кантъ], какъ кратчайшей линіи,— то сдѣлаются достаточно понятными причины того факта, что Лежандрово зданіе скоро оказа-

---

[1]) См. статью „Géométrie“ въ Grand Dictionnaire Universel du XIXe Siècle par *Pierre Larousse*.

[2]) *Loria*, Della varia fortuna di Euclide, Roma, 1893, p. 10.

лось несравненно ниже по своей прочности, чѣмъ по своей красотѣ" [1]).

Мы видимъ, такимъ образомъ, что французскіе авторы, находясь подъ вліяніемъ своихъ взглядовъ на методы преподаванія, будучи убѣждены въ томъ, что все, что явно для глаза, можетъ быть принято юными учениками безъ доказательства, желая вообще сдѣлать геометрію болѣе легкой и пригодной для усвоенія, позволили себѣ значительно удалиться отъ указаннаго Евклидомъ пути. Лежандръ, однако, строже, чѣмъ Клэро; реакція противъ взглядовъ Клэро стала дѣлаться все болѣе и болѣе рѣзкой, и около середины девятнадцатаго вѣка *Jean Marie Constant Duhamel* (1797 — 1872) и *J. Hoüel* [2]) стали сравнивать методы Лежандра и Евклида, отдавая предпочтеніе Евклидовой методѣ и предлагая вернуться къ изложенію Евклида въ измѣненной формѣ. Дюгамель объявилъ, что единственнымъ строгимъ методомъ введенія въ геометрію безконечности является методъ предѣловъ [3]); онъ много способствовалъ тому, чтобы придать этому методу ясную форму, не вызывающую возраженій. Hoüel, профессоръ въ Бордо, выражая сожалѣніе о томъ, что Евклидовы *Начала* вышли изъ употребленія во Франціи, не совѣтовалъ, однако, возвращенія къ Евклиду въ неизмѣненномъ видѣ.

Хотя Дюгамель и Hoüel и не добились желаемаго возвращенія къ Евклидовымъ методамъ, возбужденныя ими разсужденія все-таки привели къ усовершенствованію руководствъ по геометріи. Авторами руководствъ, пользующихся въ настоящее время во Франціи наибольшимъ уваженіемъ, являются *E. Rouché* и *C. de Comberousse* и *Ch. Vacquant* [4]).

---

[1]) Американское изданіе Брустерова перевода геометріи Лежандра выпустилъ въ свѣтъ въ 1828 году Charles Davies изъ Уэстъ-Пойнта. John Farrar изъ Харвардъ Коллэджа издалъ новый переводъ въ 1830 году.

[2]) *Duhamel,* Des méthodes dans les sciences de raisonnement (пять томовъ), 1866 — 1872, II, 326; *Hoüel,* Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des elements d'Euclide (Paris, 1867).

[3]) *Loria,* op. cit., p. 11.

[4]) *Loria,* op. cit., p. 12.

Въ этихъ руководствахъ къ несоизмѣримымъ величинамъ прилагается методъ предѣловъ, который нельзя упрекать въ недостаткѣ строгости. Въ приложеніяхъ обращено значительное вниманіе на проективную геометрію; Лоріа замѣчаетъ, однако, что старая и новая геометрія не соединены здѣсь въ одно связное цѣлое, а просто смѣшаны въ разрозненномъ видѣ [1]).

Италія, страна, гдѣ прежде относились къ Евклиду съ большимъ благоговѣніемъ, гдѣ Саккери въ 1733 году написалъ сочиненіе *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Евклидъ, защищенный отъ всякаго упрека), отвергла, въ концѣ концовъ, своего Евклида и отступила отъ духа его *Началъ*. Въ 1867 году профессора Cremona изъ Милана и Battaglini изъ Неаполя были членами особой правительственной коммиссіи для разсмотрѣнія преподаванія геометріи въ Италіи. Они нашли, что преподаваніе это находится въ плохомъ состояніи, и что число дурныхъ руководствъ столь велико и такъ сильно растетъ, что посовѣтовали классическимъ школамъ принять просто Евклидово руководство въ чистой его формѣ, хотя Кремона и допускалъ, что у Евклида встрѣчаются ошибки [2]). Совѣтъ этотъ сталъ закономъ. Евклидовъ текстъ былъ потомъ замѣненъ другими сочиненіями, составленными по подобному же плану [3]). Тогда появился обладающій высокими достоинствами трудъ A. Sannia и E. D' Ovidio, выполненный по образцу, который можно назвать исправленнымъ Евклидовымъ въ отличіе отъ Лежандрова образца. Затѣмъ вышли въ свѣтъ *Elementi di geometria* Риккардо де Паолисъ и *Fondamenti di geometria* Джузеппе Веронезе.

Глубокое уваженіе, которымъ пользовался Евклидъ въ Германіи въ раннія времена, доказывается многими фактами. Въ концѣ восемнадцатаго вѣка Abraham Gotthelf Kästner

---

[1]) Въ 1870 г. William Chauvenet изъ Вашингтонскаго университета въ Ст.-Луи составилъ обладающую большими достоинствами элементарную геометрію, написанную по образцу французскихъ руководствъ, въ особенности по образцу геометріи Руше и Де-Комберусса.

[2]) *Hirst,* рѣчь въ First Annual Report, A. I. G. T., 1871.

[3]) *Loria,* op. cit., p. 15.

замѣтилъ, что, „чѣмъ болѣе новыя руководства по геометріи удаляются отъ Евклида, тѣмъ болѣе теряютъ они въ ясности и основательности". Это замѣчаніе указываетъ на начало отпаденія отъ Евклидова образца. Наиболѣе распространенныя въ рединѣ девятнадцатаго вѣка руководства съ научной точки зрѣнія совершенно не удовлетворительны. Такъ, въ книгѣ Любзена (H. B. Lübsen, *Elementar-Geometrie*, 14-ое изд., Leipzig, 1870), написанной въ странѣ, изъ которой вышелъ Гауссъ, и черезъ 41 годъ послѣ появленія безсмертнаго труда Лобачевскаго, черезъ 37 лѣтъ послѣ геніальной работы Больэ, мы все еще находимъ (на стр. 52) доказательство постулата о параллельныхъ линіяхъ [1])! Если мы будемъ помнить, что геометрія имѣетъ дѣло съ непрерывными величинами, *въ области которыхъ соизмѣримость является исключеніемъ,* то насъ поразитъ нѣсколько то обстоятельство, что Любзенъ вовсе не упоминаетъ о несоизмѣримыхъ. Другая книга, находившаяся въ употребленіи нѣсколько десятилѣтій,— *Планиметрія* Коппе (Karl Koppe, *Planimetrie,* 4-ое изд., Essen, 1852). Въ ней параллельныя линіи опредѣляются, какъ прямыя, имѣющія одно и то же направленіе, а о несоизмѣримости говорится только одинъ разъ, въ примѣчаніи. Книга Kambly, стоящая невысоко по своимъ качествамъ, появилось въ 1884 г. въ 74-мъ изданіи [2]). Въ Германіи много разсуждали о преподаваніи геометріи. Было написано нѣсколько превосходныхъ руководствъ, но они, повидимому, не пользуются популярностью. Авторами лучшихъ руководствъ являются между прочими Baltzer, Schlegel, H. Müller, Kruse, Worpitzky, Henrici и Treutlein [3]).

---

[1]) Другой примѣръ смутныхъ представленій о началахъ геометріи, господствовавшихъ еще долго послѣ Лобачевскаго, мы находимъ въ книгѣ: Thomas Peronnet Thompson, Geometry without Axioms, 3d Ed., 1830, гдѣ авторъ старается „отдѣлаться" отъ аксіомъ и постулатовъ!

[2]) *A. Ziwet* въ Bulletin N. Y. Math. Soc., 1891, p. 6. Ziwet даетъ здѣсь рецензію книги, содержащую много свѣдѣній о движеніи въ Германіи, а именно: *H. Schotten,* Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Читателю полезно будетъ обратиться къ журналу Гоффмана Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, издаваемому Тейбнеромъ въ Лейпцигѣ.

[3]) *Loria,* p. 19.

Большая часть этихъ руководствъ написана, повидимому, подъ вліяніемъ Евклида [1]). Одинъ изъ вопросовъ, о которомъ больше всего спорили какъ въ Германіи, такъ и въ другихъ странахъ, это вопросъ о твердости фигуръ. Хотя Евклидъ иногда и передвигаетъ цѣлую фигуру, онъ, однако, никогда не позволяетъ частямъ ея передвигаться другъ относительно друга. У него фигуры „тверды". Многія современныя руководства уклонились отъ этого правила. Такъ, напримѣръ, мы часто позволяемъ себѣ разсматривать уголъ, какъ происшедшій отъ вращенія линіи [2]); такимъ образомъ, мы приходимъ къ понятію о „развернутомъ углѣ" (котораго нѣтъ у Евклида), который теперь соперничаетъ съ прямымъ угломъ въ качествѣ единицы угловыхъ мѣръ. Отказываясь отъ твердости фигуръ, мы приходимъ въ болѣе тѣсное соприкосновеніе съ новой геометріей; мы полагаемъ поэтому, что такой отказъ можно рекомендовать,— конечно, при условіи извѣстной осмотрительности. Чистая проективная геометрія не нуждается ни въ движеніи ни въ твердости. Приготовительные курсы созерцательной геометріи, въ связи съ геометрическимъ черченіемъ, пользуются широко распространеннымъ одобреніемъ и дѣйствительно введены въ Германіи.

Англія была родиной консерватизма въ преподаваніи геометріи. Вездѣ, гдѣ преподавалась въ Англіи геометрія, Евклидъ пользовался большимъ уваженіемъ. Оказывается, что первый, кто спасъ отъ мавровъ *Начала* и перевелъ ихъ на латинскій языкъ, былъ англичанинъ. Первый англійскій переводъ (Биллингсли) былъ напечатанъ въ 1570 году. Еще раньше Робертъ Рекордъ перевелъ Евклида на англійскій языкъ, но переводъ этотъ, вѣроятно, не былъ никогда опубликованъ [3]). Мы говорили уже въ другомъ мѣстѣ о средневѣковомъ преподаваніи геометріи въ Оксфордѣ. Оно продолжалось и потомъ съ ограниченнымъ успѣхомъ. Около 1570 года *Sir Henry Savile* (1549 — 1622), ректоръ Мертонъ

---

[1]) См. *Loria*, p. 19., *Schotten*, op. cit.; *H. Müller*, Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Metz, 1889.

[2]) *H. Müller*, op. cit., p. 2.

[3]) *W. W. R. Ball*, Maths. at Cambridge, p. 18.

Колледжа, стараясь вызвать интересъ въ занятіямъ математикой, прочелъ курсъ лекцій о греческой геометріи. Эти лекціи были опубликованы въ 1621 г. Въ заключеніи своего курса онъ сказалъ слѣдующее: „Милостью Божіей, господа слушатели, я исполнилъ свое обѣщаніе; я уплатилъ свой долгъ. Я объяснилъ, насколько хватило моихъ способностей, опредѣленія, постулаты, аксіомы и *первыя восемь предложеній* Евклидовыхъ *Началъ.* Здѣсь, слабѣя подъ бременемъ лѣтъ, я складываю свое искусство и свои приборы" [1]). Слѣдуетъ помнить, что въ тѣ времена еще царила схоластическая ученость и полемическое богословіе. Савиль стоялъ въ рядахъ тѣхъ, кто трудился для возрожденія истиннаго знанія. Онъ основалъ двѣ профессорскія каѳедры въ Оксфордѣ, одну по геометріи, другую по астрономіи, и обезпечилъ каждую изъ нихъ жалованіемъ въ 150 фунтовъ стерлинговъ въ годъ. Во вступленіи въ актъ, которымъ онъ приноситъ это жалованіе въ даръ Университету, онъ говоритъ, что въ Англіи геометрія была совершенно заброшена и неизвѣстна.

Курсъ Савиля состоитъ изъ тринадцати лекцій, въ которыхъ онъ обращалъ гораздо больше вниманіе на филологическіе и историческіе вопросы, чѣмъ на самый предметъ этихъ лекцій — геометрію [2]). Онъ говоритъ въ одномъ мѣстѣ: „Въ прекрасномъ строеніи геометріи есть два порока, два недостатка; больше я не знаю". Эти „пороки" — теорія параллельныхъ линій и теорія пропорцій. Въ тѣ времена противъ постулата Евклида дѣлались возраженія, въ которыхъ говорилось, что предложеніе это не имѣетъ характера аксіомы и требуетъ доказательства. Мы видимъ теперь, при свѣтѣ не-Евклидовой геометріи, что это предложеніе есть чистое допущеніе, доказать которое невозможно; знаемъ, что существуетъ геометрія, основанная на допущеніи, противорѣчащемъ Евклидову постулату, что онъ отдѣляетъ Евклидову геометрію отъ псевдо-сферической. Въ этомъ отношеніи, поэтому, въ

---

[1]) Переведено съ латинскаго *В. Уэвеллемъ (W. Whewell)* въ его книгѣ Hist. of the Induct. Sciences, Vol. I, New York, 1858, p. 205 *).

*) Русскій переводъ сдѣланъ съ англійскаго, приведеннаго въ текстѣ. *Прим. ред.*

[2]) *Cantor,* II, 609.

Началахъ Евклида нѣтъ „порока“. Второй „порокъ“ относится къ шестому опредѣленію книги V[1]). Съ педагогической точки зрѣнія, книга эта и теперь подвергается критикѣ за чрезмѣрную неясность ея для юныхъ умовъ; но съ точки зрѣнія научной (не считая неважныхъ поправокъ, которыя считалъ необходимымъ сдѣлать въ этой книгѣ Робертъ Симсонъ) на книгу эту смотрятъ теперь, какъ на обладающую исключительными достоинствами.

Въ теченіе семнадцатаго и восемнадцатаго столѣтій вышло въ свѣтъ значительное число англійскихъ изданій Евклида. Они были вытѣснены съ 1756 года *Евклидомъ* Роберта Симсона. Въ первые годы девятнадцатаго вѣка Евклидъ все еще не имѣлъ соперниковъ въ Великобританіи, но въ нѣкоторыхъ умахъ уже возникла мысль о желательности сдѣлать въ немъ измѣненія. Еще въ 1795 году *John Playfair* (1748 — 1819) издалъ въ Эдинбургѣ свои *Начала Геометріи (Elements of Geometry)*, содержащія первыя шесть книгъ Евклида и приложеніе, которое заключаетъ въ себѣ приближенную квадратуру круга (т. е. вычисленіе π), а также книгу о геометріи въ пространствѣ, составленную по другимъ источникамъ. При изложеніи пятой книги Евклида Плэйфэръ старается освѣтить темноту Евклидова стиля, вводя языкъ алгебры. Плэйфэръ вводитъ также въ теорію параллельныхъ линій новый постулатъ, который проще Евклидова. Постепенно стали указывать на выгоды болѣе значительныхъ отступленій отъ Евклидова текста. Въ 1849 г. Де Морганъ указалъ на недостатки у Евклида[2]). Около двадцати лѣтъ спустя, Уильсонъ[3]) и Джонсъ[4]) указали на то, что желательно было бы совершенно отказаться отъ Евклидова метода. Наконецъ, въ 1869 г. одинъ изъ двухъ величайшихъ англійскихъ математиковъ того времени возвысилъ свой мощный голосъ противъ Евклида. J. J. Sylvester сказалъ:

---

[1]) *Engel* и *Stäckel,* p. 47.

[2]) *Loria,* op. cit., p. 24, ссылается на *Де Моргана* въ Companion to the British Almanac, котораго мы не видѣли.

[3]) *Wilson,* Educational Times, 1868.

[4]) *Jones,* On the Unsuitableness of Euclid as a Text-book of Geometry, London.

„Я былъ бы очень радъ видѣть Евклида поставленнымъ на почетномъ мѣстѣ на полкѣ, или погребеннымъ глубже, чѣмъ когда-либо опускался лотъ,— сдѣлать его для учащагося въ школѣ юноши недоступнымъ“ [1]). Эти нападки на Евклида, какъ на школьное руководство, не вызвали непосредственно никакихъ перемѣнъ въ системѣ преподаванія геометріи. То, что иногда пользовались, какъ учебникомъ, Брустеровымъ переводомъ Лежандра или геометріей Уильсона, такъ же мало указываетъ на измѣну Евклиду, какъ и то, что въ восемнадцатомъ столѣтіи пользовались иногда геометріей Томаса Симпсона. Эти споры привели, однако, къ одному счастливому событію, къ организаціи въ 1870 г. *Ассоціаціи для усовершенствованія преподаванія геометріи* [*Association for the Improvement of Geometrical Teaching* (A. I. G. T.)]. T. A. Hirst, первый президентъ этой ассоціаціи, выразился слѣдующимъ образомъ: „Я могу сказать далѣе, что среди извѣстныхъ мнѣ учителей, преподающихъ съ успѣхомъ геометрію, не найдется ни одного, который не признался бы въ томъ, что успѣхъ его почти пропорціоналенъ той

1) *Sylvester's* Presidential Address to the Math. and Phys. Section of the Brit. Ass. at Exeter, 1869, дано въ Laws of Verse *Сильвестера,* London, 1870, p. 120. Это краснорѣчивое обращеніе Сильвестера, въ качествѣ президента математической и физической секціи Британской Ассоціаціи, въ 1869 году въ Эксетерѣ, представляетъ собою мощный отвѣтъ на утвержденіе Huxley, что „математика — наука, не знающая ни наблюденія, ни эксперимента, ни индукціи, ни причинной зависимости“. Мы приводимъ слѣдующія фразы Сильвестера: „Конечно, я не стану поддерживать нелѣпаго положенія, что привычка наблюдать внѣшнюю природу лучше всего или даже въ какой-либо степени развивается при занятіяхъ математикой“. „Большая часть великихъ идей современныхъ математиковъ, если и не всѣ, получили свое начало въ наблюденіи“. „Лагранжъ, высшій авторитетъ въ этомъ отношеніи, говоритъ съ особеннымъ удареніемъ о томъ, что, по его убѣжденію, для математика очень важна способность наблюдать; Гауссъ называлъ математику наукой глаза . . .; Риманнъ, котораго мы никогда не перестанемъ оплакивать, написалъ диссертацію съ цѣлью показать, что основаніе нашего понятія о пространствѣ чисто эмпирическое, что наше знаніе законовъ его есть результатъ наблюденія, и что можно представить себѣ существованіе пространствъ другого рода, подчиненныхъ законамъ, отличнымъ отъ тѣхъ, что управляютъ дѣйствительнымъ пространствомъ, въ которое мы погружены“.

свободѣ, съ которой онъ позволяетъ себѣ отступать отъ строгаго слѣдованія Евклидовымъ *Началамъ,* и что отступленія эти именно и сообщаютъ предмету ту жизнь, которой безъ нихъ онъ бы не имѣлъ. Я не знаю ни одного геометра, прочитавшаго Евклида *критически,* ни одного преподавателя, обращавшаго вниманіе на методы изложенія, который не допускалъ бы, что Евклидовы *Начала* полны недостатковъ. Они вѣдь, въ самомъ дѣлѣ, „кишатъ ошибками", какъ говорилъ знаменитый профессоръ этой коллегіи (Де-Морганъ), подъ руководствомъ котораго воспитывались, быть можетъ, нѣкоторые изъ наиболѣе выдающихся мыслителей нашего времени" [1]).

Послѣ продолжительнаго обсужденія этого вопроса Ассоціація издала въ 1875 году *Syllabus* (конспектъ) Плоской Геометріи, содержаніе котораго соотвѣтствуетъ книгамъ I—VI Евклидовыхъ *Началъ.* Авторы задались цѣлью „сохранить духъ и существенныя особенности стиля Евклидовыхъ *Началъ* и, не жертвуя ничѣмъ въ отношеніи строгости ни по существу ни по формѣ, заполнить найденные пробѣлы, исправить многіе второстепенные недостатки. Хотя послѣдовательность предложеній и отличается значительно отъ той, которая принята у Евклида, но это измѣненіе порядка предложеній, главнымъ образомъ, приводитъ ихъ ближе къ тѣмъ аксіомамъ, на которыхъ они основаны; такой порядокъ не *противорѣчитъ* Евклидову въ томъ смыслѣ, что ни одна теорема не доказывается на основаніи предложенія, слѣдующаго за нею въ послѣдовательности, принятой у Евклида, хотя во многихъ случаяхъ Евклидовы доказательства упрощаются введеніемъ нѣсколькихъ теоремъ, находящихся въ послѣдовательности предложеній *Силлабуса,* но не высказанныхъ явно у Евклида" [2]). *Syllabus* былъ тщательно разсмотрѣнъ лучшими англійскими математиками; Британская Ассоціація для содѣйствія успѣхамъ науки назначила коммиссію для разсмотрѣнія *Силлабуса* и для сотрудничества съ A. I. G. T. Въ своемъ отчетѣ, въ 1877 г., коммиссія, говоря благо-

---

[1]) First General Report, A. I. G. T., 1871, p. 9.

[2]) Thirteenth General Report, 1887, pp. 22—23.

склонно о *Силлабусѣ*, выражаетъ убѣжденіе въ томъ, „что ни одно изъ появившихся до сихъ поръ руководствъ не можетъ замѣнить Евклида въ отношеніи авторитетности". Большимъ препятствіемъ для реформы служило, между прочимъ, то обстоятельство, что большіе университеты, Оксфордскій и Кэмбриджскій, на своихъ пріемныхъ испытаніяхъ настойчиво требовали, чтобы экзаменующіеся строго придерживались Евклида въ отношеніи доказательствъ предложеній и ихъ послѣдовательности; такимъ образомъ, преподаватели не могли ни въ какомъ отношеніи отступать отъ Евклида. Замѣчательно, сверхъ того, полное отсутствіе задачъ или вопросовъ, имѣющихъ цѣлью опредѣлить дѣйствительное знаніе ученика. Но въ послѣдніе годы труды Ассоціаціи были признаны университетами, и допущена нѣкоторая свобода въ преподаваніи. Мы замѣтили выше, что J. J. Sylvester горячо поддерживалъ реформу. Разница во взглядахъ на этотъ вопросъ двухъ наиболѣе замѣчательныхъ британскихъ математиковъ — Сильвестера, алгебраиста, и Артура Кэли, алгебраиста и геометра,— доходила до смѣшного. Сильвестеръ хотѣлъ похоронить Евклида „глубже, чѣмъ когда-либо опускался лотъ",— сдѣлать недоступнымъ для учащагося въ школѣ юноши; Кэли, горячій поклонникъ Евклида, желалъ сохраненія Симсонова *Евклида*. Когда ему напомнили, что книга эта представляетъ собою смѣсь Евклида съ Симсономъ, Кэли предложилъ выбросить все, что было добавлено Симсономъ, и строго держаться Евклидова оригинала [1]).

Наиболѣе трудной задачей при составленіи *Силлабуса* было изложеніе теоріи пропорцій, Евклидовой книги V. Несмотря на свои достоинства, вызывавшія большое восхищеніе математиковъ, книга эта оказалась практически непригодной для преподаванія въ школѣ. Никсонъ говоритъ: „принятый въ наше время обычай *пропускать* книгу V, принимая вмѣстѣ съ тѣмъ совершенно спокойно тѣ результаты ея, которые нужны для книги VI, очень нелоги-

---

[1]) Fifteenth General Report, A. I. G. T., 1889, p. 21. См. также Fourteenth General Report, p. 28.

ченъ“ [1]). О томъ же свидѣтельствуетъ и Hirst: „Черезъ пятую книгу Евклида... неизмѣнно „перескакивали“ всѣ ученики, за исключеніемъ самыхъ способныхъ“ [2]). Передъ глазами нашими возникаетъ необычайная картина того, какъ ученики „перескакиваютъ“ черезъ ученіе о пропорціяхъ величинъ съ согласія тѣхъ самыхъ преподавателей, которые возмущались тѣмъ, что Лежандръ отсылаетъ къ ариѳметикѣ учащихся, желающихъ ознакомиться съ теоріей пропорцій! Не служитъ ли этотъ обычай англійскихъ преподавателей молчаливымъ признаніемъ справедливости утвержденія Раумера [3]), который говорилъ, что въ качествѣ элементарнаго руководства Евклидовы *Начала* должны быть совершенно отвергнуты? Да и самъ Евклидъ, вѣроятно, никогда не предназначалъ своихъ *Началъ* для начинающихъ. Но англичане еще не готовы къ тому, чтобы, слѣдуя примѣру другихъ народовъ, отвергнуть Евклида. Британскій умъ движется впередъ посредствомъ эволюціи, а не посредствомъ революціи. Британцы задались цѣлью *пересмотрѣть, упростишь и сдѣлать богаче* текстъ Евклида.

Первая важная попытка пересмотрѣть и упростить пятую книгу была сдѣлана Августомъ Де Морганомъ. Въ 1836 году онъ издалъ книгу, „The Connexion in Number and Magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid“ („Соотношеніе числа и величины; попытка объясненія пятой книги Евклида“). Въ 1837 г. книга эта появилась, какъ приложеніе къ его „Началамъ Тригонометріи“ („Elements of Trigonometry“). По образцу этого пересмотрѣннаго Де Морганомъ изложенія теоріи пропорцій и составленъ отдѣлъ *Силлабуса,* замѣняющій книгу V. Среди членовъ подкоммиссіи, назначенной Ассоціацей для составленія этого отдѣла *Силлабуса,* возникли большія разногласія по вопросу объ изложеніи теоріи пропорцій, и подкоммиссія не пришла къ единогласному рѣшенію [4]). Прежде всего возникли различ-

---

[1]) *R. C. J. Nixon,* Euclid Revised, Oxford, 1886, p. 9.

[2]) Fourth General Report, A. I. G. T., 1874, p. 18.

[3]) *Raumer,* Geschichte der Pädagogik, Vol. III.; см. также *K. A. Schmid,* Encyklopädie des gesammten Erziehungs-und Unterrichtswesens, art. „Geometrie“.

[4]) *Nixon,* op. cit., p. 9.

ныя предположенія о приведеніи въ другой порядокъ и упрощеніи Евклидовой книги V. По Евклиду, четыре величины a, b, c, d составляютъ пропорцію, если мы имѣемъ одновременно $ma \gtreqless nb$ и $mc \gtreqless nd$, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n. Подверглось разсмотрѣнію опредѣленіе пропорціи, принятое италіанцами Sannia и D'Ovidio, въ которомъ говорится не о кратныхъ величинъ a, b, c, d, а объ ихъ доляхъ; по этому опредѣленію величины эти составляютъ пропорцію, если при всякомъ цѣломъ значеніи m величина a заключаетъ $\frac{b}{m}$ не большее и не меньшее число разъ, чѣмъ c заключаетъ $\frac{d}{m}$. Другой изъ разсмотрѣнныхъ методовъ изложенія трактуетъ несоизмѣримыя величины съ помощью теоріи предѣловъ; такой методъ принятъ во французскомъ руководствѣ E. Rouché и C. de Comberousse, а также у многихъ американскихъ авторовъ. Этотъ методъ, какъ и опредѣленіе пропорціи, данное у Sannia и D'Ovidio, основанъ на законѣ непрерывности, *грубое* опредѣленіе котораго, по Клиффорду, состоитъ въ томъ, „что всякое количество можетъ быть раздѣлено на любое число равныхъ частей" [1]). Если признать, что желательно при всякомъ опредѣленіи дѣлать какъ можно меньше допущеній, то нужно предпочесть Евклидово опредѣленіе пропорціи, какъ не связанное съ постулатомъ непрерывности. Для умовъ, способныхъ понять Евклидову теорію пропорцій, теорія эта по красотѣ своей превосходитъ изложеніе несоизмѣримыхъ количествъ съ помощью теоріи предѣловъ. Ганкель говоритъ: „мы не можемъ не замѣтить, что преобладающіе теперь способы изложенія теоріи ирраціональныхъ величинъ въ геометріи плохо приспособлены къ существу этого предмета; они раздѣляютъ самымъ неестественнымъ образомъ вещи, связанныя другъ съ другомъ, и заковываютъ непрерывное — къ области котораго, по самой природѣ своей, принадлежитъ строеніе геометріи — въ узы раздѣльнаго, которыя оно все-таки по-

[1]) The Common Sense of the Exact Sciences, New York, 1891, p. 107.

стоянно разрываетъ“ [1]). И намъ кажется тѣмъ не менѣе, что можно привести много аргументовъ въ защиту метода предѣловъ. Со стороны недостатка строгости противъ этого метода не было сдѣлано ни одного серьезнаго возраженія [*]). Сверхъ того, желательно, чтобы учащійся освоился съ важнымъ понятіемъ о *предѣлѣ*. Алгебраическая теорія пропорцій, въ которой методъ предѣловъ служитъ мостомъ, соединяющимъ области соизмѣримыхъ и несоизмѣримыхъ количествъ, представляетъ къ тому же сравнительно простое изложеніе этого предмета. Такой способъ изложенія опирается на законѣ соотвѣтствія или гомологіи, какъ называетъ его Ньюкомъ [2]), въ силу котораго существуетъ однооднозначное соотвѣтствіе въ обширномъ классѣ теоремъ, принадлежащихъ къ областямъ алгебры и геометріи. Такое гомологическое объясненіе способствовало объединенію изложенія алгебры и геометріи и привело къ тому, „что онѣ даже почти слились въ одну науку“.

Въ послѣдніе годы вліяніе Ассоціаціи (которая расширила планъ своихъ работъ, включивъ въ него вообще начальное преподаваніе математики) проявилось въ различныхъ направленіяхъ. Чтобы замѣтить прогрессъ въ преподаваніи геометріи, намъ стоитъ только разсмотрѣть такія изданія и передѣлки Евклида, какъ тѣ, авторами которыхъ являются Casey, Nixon, Mackay, Langley и Phillips, Taylor, а также *Начала плоской геометріи (Elements of Plane Geometry)*, изданныя Ассоціаціей [3]).

Опытъ европейскихъ странъ и Америки показываетъ, что задача о преподаваніи геометріи представляетъ большія трудности и до сихъ поръ не получила еще удовлетворительнаго рѣшенія. Сколько свѣдѣній по новой геометріи

---

[1]) *Hankel,* op. cit., p. 65.

[*]) Ср. приложеніе въ концѣ книги: „О способахъ изложенія теоріи пропорцій“. *Прим. ред.*

[2]) *Simon Newcomb,* „Modern Mathematical Thought“ въ Bulletin of the New York Math. Society, Vol. III, 1894, pp. 97—103. См. также *Hankel,* Complexe Zahlen, Leipzig, 1867, p. 65.

[3]) Исторію преподаванія геометріи въ Соединенныхъ Штатахъ читатель найдетъ въ The Teach. and Hist. of Math. in the U. S.

слѣдуетъ вводить въ элементарныя руководства? Какъ согласить удовлетворительнымъ образомъ строгое систематическое изложенiе съ требованiями педагогической науки? Эти вопросы все еще представляютъ жгучiй интересъ. Мы видѣли въ другомъ мѣстѣ, что самъ Евклидъ прибѣгаетъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, вмѣсто логики къ интуицiи для познаванiя извѣстныхъ фактовъ. Возможно, что и въ будущемъ, какъ и въ прошломъ въ наиболѣе распространенныхъ элементарныхъ руководствахъ, будетъ приниматься на вѣру, въ качествѣ вещей очевидныхъ, гораздо больше истинъ, чѣмъ у Евклида, но мы чувствуемъ увѣренность въ томъ, что все это будетъ дѣлаться открыто, что будутъ избѣгать какихъ бы то ни было попытокъ прикрыть пропуски въ разсужденiяхъ или заставить ученика повѣрить въ логическую обоснованность какой-нибудь вещи, когда, въ сущности, она покоится на недостаточныхъ логическихъ основанiяхъ. Мы рѣшаемся предсказать, что геометрiи будущаго не будутъ уже пытаться доказывать постулатъ о параллельныхъ линiяхъ и не будутъ считать направленiе основнымъ геометрическимъ понятiемъ.



ПРИБАВЛЕНІЯ

Прибавленіе 1.

О происхожденіи шестидесятичной системы нумераціи.

Къ стр. 11.

Въ 1896 году *Lehmann* (Verhandl. d. Berl. Anthropol. Gesellschaft; ср. его же статью въ Zeitschr. für Assyriologie, Bd. XIV, 1899, p. 365) предложилъ другую астрономическую гипотезу происхожденія шестидесятичной системы нумераціи, состоящую въ слѣдующемъ: система эта покоится на замѣченномъ вавилонянами отношеніи видимаго поперечника солнца (въ мѣрахъ времени 2 минуты, $\frac{1}{720}$ полныхъ сутокъ) къ двойному часу, или двойному часовому углу, KAS-BU (120 минутъ, $\frac{1}{12}$ полныхъ сутокъ), служившему единицей угловой мѣры. Гипотеза эта встрѣтила сочувствіе со стороны такого авторитета, какъ *F. X. Kugler* (Zeitschr. für Assyr., Bd. XV, 1900, pp. 391, 392), который отдаетъ ей предпочтеніе передъ гипотезой Кантора. Въ 1904 году появилась статья *Кевича* (*G. Kewitsch,* Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems, Zeitschrift f. Assyr., Bd. XVIII, pp. 73—95), который вообще подвергаетъ сомнѣнію астрономическое происхожденіе шестидесятичной системы и старается показать возможность связи этой системы со счетомъ на пальцахъ. Вотъ въ чемъ состоятъ главныя критическія и теоретическія положенія Кевича:

1. Если бы предположеніе Кантора было вѣрно, то вавилоняне, которые по смѣщенію временъ года очень скоро должны были замѣтить ошибку въ 5 дней, раздѣлили

бы окружность на 365 дней, подобно тому, какъ поступали китайцы, дѣлившіе окружность на $365^{1}/_{4}$ градусовъ (*Cantor,* I, 3te Aufl., 1907, p. 681, Le Tcheou Ly ou rites de Tcheou, trad. par *Ed. Biot,* Paris, 1851, p. 625).

2. Какъ замѣчаетъ *Ginzel* (Beiträge zur Alten Geschichte, B. I, p. 352) въ дошедшихъ до насъ памятникахъ вавилонянъ встрѣчается лишь солнечный годъ въ 365 дней и лунный годъ въ 354 или 355 дней; существованіе у вавилонянъ года съ округленнымъ числомъ дней 360 можно предполагать лишь на основаніи нѣкоторыхъ особенностей въ счетѣ времени у народовъ передней Азіи. Можно предположить существованіе *дѣлового,* или *расчетнаго,* года въ 360 дней, 12 мѣсяцевъ по 30 дней,— такимъ годомъ пользуемся и мы въ настоящее время,— но *солнечнаго* года въ 360 дней безъ *вставочныхъ дней* не могло быть ни у одного народа. Округленіе дѣйствительнаго числа дней предполагаетъ уже существованіе шестидесятичной системы.

3. Гипотеза Лемана основана на томъ, что время прохожденія солнечнаго диска черезъ меридіанъ — 2 минуты. Ginzel (Beitr. z. A. Gesch., 1901, B. I, 350, Anm. 3) замѣтилъ, что истинная величина этого времени — 2.14 мин., что даетъ отношеніе $\frac{1}{673}$. Онъ прибавляетъ, что получилась бы еще большая величина, если бы вмѣсто времени прохожденія черезъ меридіанъ измѣрялось бы время восхожденія и захожденія солнечнаго диска. Эти данныя отнюдь не благопріятствуютъ гипотезѣ Лемана.

4. Шестидесятичная система могла возникнуть отъ смѣшенія десятичной системы и шестиричной при культурномъ сліяніи двухъ народовъ, изъ которыхъ одинъ пользовался десятичной системой, другой шестиричной. На такое смѣшеніе указываютъ и нѣкоторыя особенности числовыхъ обозначеній въ клинообразныхъ письменахъ.

5. Происхожденіе шестиричной системы можно объяснить тѣмъ, что, считая по пальцамъ одной руки, сжимали руку въ знакъ окончанія этого счета и, присоединяя сжатую руку къ пяти пальцамъ, пришли къ числу 6, какъ остановочному пункту при счетѣ.

Въ концѣ своей статьи Кевичъ говоритъ, что онъ старался доказать въ ней, что *счетъ* предшествуетъ *измѣренію* даже и въ случаѣ шестидесятичной системы. Измѣреніе всегда подвержено ошибкамъ. Округляя неточныя числа, полученныя при измѣреніи, всегда руководствуются готовой уже господствующей системой счисленія.

Слабость гипотезы Кевича заключается въ неудовлетворительномъ объясненіи происхожденія шестиричной системы нумераціи. По справедливому замѣчанію Кантора (Vorl. üb. Gesch. d. Math. t. I, 3[te] Aufl., p. 32), описанный Кевичемъ процессъ счета на пальцахъ приводитъ скорѣе къ пятиричной, чѣмъ къ шестиричной системѣ.

Я думаю, однако, что мысль, высказанная Кевичемъ въ концѣ его статьи, вполнѣ справедлива. Больше того, я полагаю, что въ основѣ своей всякій счетъ есть *счетъ двигательный,* или инструментальный, и что основнымъ инструментомъ этого счета являлись первоначально конечности человѣческаго тѣла, на болѣе высокой степени культуры — руки или, лучше сказать, пальцы рукъ и ихъ суставы.

Короадосы въ Бразиліи считаютъ тройками, по числу суставовъ на каждомъ пальцѣ, при чемъ двухсуставный большой палецъ не участвуетъ въ счетѣ; на четырехъ пальцахъ руки просчитываютъ такимъ образомъ до двѣнадцати. Каждый цѣлый палецъ получаетъ затѣмъ значеніе 12. На лѣвой рукѣ можно такимъ образомъ считать до шестидесяти, на обѣихъ рукахъ до 120 (*Kewitsch,* l. c., pp. 93, 94; cp. *Spix und Martius,* Reise in Brasilien, München, 1823, Bd. I, p. 387; *Joh. Schmidt,* Abhandl. d. Berl. Akad., 1890, p. 40). Такой процессъ инструментальнаго счета приводитъ къ двѣнадцатиричному счисленію, можетъ быть, также и къ шестидесятичному.

Другой способъ счета на пальцахъ, который приводитъ еще проще къ шестидесятичному счисленію, найденъ въ Бенгаліи (*N. B. Halhed,* A Grammar of the bengal language, Hoogly in Bengal, 1778, p. 167; см. *A. P. Pihan,* Exposé des signes de numération chez les peuples orientaux anciens et modernes, Paris, 1860, pp. 93, 94). Во всѣхъ своихъ вычисленіяхъ бенгальцы, по словамъ Хальхеда, пользуются

числомъ *четыре*. У ихъ банкировъ приняты для счета денежныхъ суммъ подраздѣленія на четыре, да и всѣ другія вещи считаютъ они такимъ же образомъ. „Вѣроятно“, говоритъ Хальхедъ, „это остатки древнѣйшей ариѳметики, которая состояла въ началѣ въ счетѣ только по пальцамъ“ (т. е. по четыремъ пальцамъ) „и въ повтореніи затѣмъ того же процесса“.

„И въ наше время бенгальцы пользуются для счета суставами своихъ пальцевъ; они начинаютъ счетъ съ нижняго сустава мизинца лѣвой руки и, продолжая считать такимъ образомъ, заканчиваютъ счетъ большимъ пальцемъ, утолщеніе котораго тоже считается, какъ суставъ; такимъ образомъ вся рука содержитъ число *пятнадцать*“.

Съ этимъ способомъ счета связанъ обычай, хорошо извѣстный индійскимъ купцамъ, заключать тайно условія торга, прибѣгая къ той же уловкѣ, какой пользуются и китайцы (ср. стр. 2 текста).

Шестидесятичное счисленіе могло произойти отъ продолженія такого счета на правой рукѣ, а затѣмъ на другой сторонѣ суставовъ правой и лѣвой руки въ обратномъ порядкѣ; — могло оно произойти также отъ смѣшенія четверичной и пятнадцатиричной системъ. У бенгальцевъ, однако, устная нумерація денежныхъ суммъ не содержитъ слѣдовъ пятнадцатиричной системы, а представляетъ сочетаніе четверичной системы съ пятиричной. Общее устное и письменное счисленіе у нихъ десятичное. Цифры ихъ напоминаютъ отчасти цифры деванагари, другія же отличаются отъ цифръ, употребляемыхъ въ другихъ частяхъ Индіи (*Pihan*, l. c., p.p. 89, 90).

Прибавленіе 2.

Сокращенныя обозначенія въ алгебрѣ Діофанта.

Къ стр. 37.

Діофантъ вводитъ слѣдующимъ образомъ знаки вычитанія, или, вѣрнѣе, недостатка:

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς

κάτω νεῦον, ⩚ (Liber I, Def. IX, *Diophanti Alexandrini* Opera omnia cum graec. commentariis, ed. et latine interpr. est *Paulus Tannery,* Lips., 1893, Vol. I, p. 12, 19—21), т. е. „Недостатокъ, умноженный на недостатокъ даетъ положительное число, недостатокъ же на положительное число даетъ недостатокъ, а знакъ недостатка — буква Ψ, усѣченная и перевернутая —⩚“. Трудно сказать, была ли именно такова первоначальная форма Діофантова знака. Въ рукописяхъ данъ кривой знакъ ↑′; символъ этотъ часто наклоненъ вправо и напоминаетъ букву ламбда. Тоже самое можно сказать и объ остальныхъ сокращеніяхъ (*Dioph. Op.,* Vol. II, Lips., 1895, Prolegomena P. Tannery, pp. XL, XLI. Объ обозначеніяхъ дробей см. *ibid,* p.p. XLII — XLV). *Хисзъ* полагаетъ, что знакъ ⩚ есть соединеніе двухъ знаковъ Λ и |, начальныхъ буквъ слова λεῖψις (Heath, Dioph. of. Al., p. 73).

Прибавленіе 3.

О дробяхъ и ихъ опредѣленіи.

Къ стр. 43.

Лучшее и простѣйшее изложеніе свѣдѣній о различныхъ теоріяхъ дробей съ историческими и литературными указаніями читатель найдетъ въ новой „Энциклопедіи Математическихъ Наукъ“, выходящей на двухъ языкахъ, нѣмецкомъ и французскомъ, и именно въ французскомъ изданіи, гдѣ изложеніе полнѣе: Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées publ. sous les auspices des acad. d. Sc. de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Édit. française réd. et publ. d'après l'éd. allemande sous la direct. de *Y. Molk,* t. I, vol. I, I,1. Principes fondamentaux de l'arithmétique. Exposé, d'après l'art. all. de *H. Schubert,* p. *J. Tannery* et *J. Molk.* Въ §§ 21 и 24 этой статьи содержатся указанія на формальную теорію дробей, основанную на „принципѣ сохраненія формальныхъ законовъ дѣйствій“ и теорію „операторовъ“ Méray и Peano; въ § 23 говорится о конкретномъ происхожденіи понятія о дроби. Здѣсь въ немногихъ словахъ изложены основы той теоріи, которая

единственно пригодна въ настоящее время для начальнаго преподаванія, и ясное пониманіе которой необходимо для всякаго преподавателя:

„Исторически дроби возникли тогда, когда захотѣли измѣрять такія непрерывныя величины,— напримѣръ, длины,— которыя не могли быть разсматриваемы, какъ составленныя изъ извѣстнаго числа единицъ. Единица (величины) раздѣляется тогда на извѣстное число равныхъ частей, и, если одна изъ этихъ частей содержится точно извѣстное число разъ въ разсматриваемой величинѣ, то найдена *мѣра* этой величины, выраженная съ помощью двухъ натуральныхъ чиселъ, изъ коихъ одно, *знаменатель*, показываетъ, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, другой, *числитель*, сколько такихъ частей содержитъ измѣряемая величина. Эта мѣра называется также *отношеніемъ* измѣряемой величины къ величинѣ, принятой за единицу.

Числитель пишутъ подъ знаменателемъ и раздѣляютъ эти два числа чертой. Символъ $\frac{a}{b}$, составленный такимъ образомъ изъ двухъ цѣлыхъ чиселъ, безъ отношенія къ его происхожденію, разсматривается тогда, какъ число (дробь, дробное число). Если бы единица мѣры содержалась въ измѣряемой величинѣ ровно a разъ, то мы пришли бы такимъ образомъ къ символу $\frac{a}{1}$, который пишется просто a.

Понятно, что нужно снова повторить всѣ опредѣленія, приспособивъ ихъ къ этому новому роду чиселъ. При выборѣ опредѣленій можно, становясь на эту точку зрѣнія, руководствоваться конкретнымъ происхожденіемъ дробей такъ, чтобы равныя дроби измѣряли равныя величины, чтобы сложеніе дробей соотвѣтствовало сложенію величинъ, а умноженіе — *перемѣнѣ единицы мѣры*. Вычитаніе и дѣленіе по прежнему разсматриваются, какъ дѣйствія, обратныя сложенію и умноженію. При этомъ сохраняются и основныя свойства дѣйствій".

Формальный характеръ теоріи *отвлеченныхъ* дробей сознавалъ уже Стифель. Въ своемъ сочиненіи *Arithmetica Integra* онъ уподобляетъ ученіе о дробяхъ ученію объ отрицательныхъ числахъ, проводя аналогію между геометрической и ариѳметической прогрессіями.

„Et sic patet", говоритъ онъ, „pulcherrimum iudicium de minutiis unitatis abstractae, & de iis quae Euclides, Boëtius & alii senserunt de indivisibilitate unitatis. De qua re etiam primo libro disputaui, uidelicet minutias unitatis habendas esse pro numeris fictis", т. е. „Такимъ образомъ открывается путь къ наилучшему сужденію о дробяхъ отвлеченной единицы и о мнѣніяхъ Евклида, Боэтія и другихъ о недѣли-

мости единицы. Объ этомъ предметѣ я разсуждалъ уже и въ первой книгѣ, а именно говорилъ о томъ, что дроби единицы слѣдуетъ считать числами воображаемыми (существующими только въ нашемъ представленіи)". (Ср. *Boetii,* De Institutione Arithmetica, l. I, 9: „usquequam divisio partium ad indivisibilem naturaliter perveniat unitatem", I, 10: „propter insecabilis unitatis naturam". Ed. *Friedlein,* pp. 17, 23).

Въ первой книгѣ своей *Ариѳметики* Стифель говоритъ о дробяхъ слѣдующее:

„Sed quid dices ad Arithmeticorum sententias, qui dicunt unitatem esse indivisibilem?.... Respondeo permittendum esse Arithmeticis, ut dum bona ratione & utili consilio aliquid fingunt, uti possint huiusmodi rebus fictis. Liceat igitur eis fingere fractiones unitatis indivisibilis, uel hac saltem utilitate, ut earum fractiones Algorithmus, docendi gratia, extet, qui uidelicet exemplar sit regularum pro omnibus Minutiis ueris, qualitercunque signentur aut denominentur, nisi forte Minuta Physica uelis esse excepta. Certe insignis est ista utilitas, id quod nouerunt, qui calculationes Algebrae non ignorant", т. е. „Но что возразить на мнѣніе тѣхъ ариѳметиковъ, которые говорятъ, что единица недѣлима?.... Я отвѣчу, что ариѳметикамъ позволительно пользоваться такого рода воображаемыми вещами, лишь бы вещи эти были построены на разумномъ основаніи и цѣлесообразно. Должно быть имъ позволено и воображать себѣ дроби недѣлимой единицы, хотя бы ради построенія, съ учебной цѣлью, алгориѳма этихъ дробей, съ тѣмъ, именно, чтобы онъ служилъ образцомъ для правилъ, относящихся ко всѣмъ дѣйствительнымъ дробямъ, каково бы ни было ихъ значеніе или наименованіе, развѣ только за исключеніемъ дробей физическихъ. Безъ сомнѣнія, такого рода польза значительна, что знаютъ тѣ, кому небезъизвѣстны алгебраическія вычисленія". (См. Arithmetica Integra Authore *Michaele Stifelio.* Norimbergae, MDXLIIII, f. 250 r. и f. 8 r., De natura et speciebus numerorum abstractorum. Cap. II). Терминъ „Minutiae Physicae" прилагался еще въ средніе вѣка къ шестидесятичнымъ дробямъ.

Прибавленiе къ стр. 47 — см. *Прибавленiе 10.* Теорема Пиѳагора у индусовъ, къ стр. 131.

Прибавленiе 4.

О Порисмахъ Евклида.

Къ стр. 79.

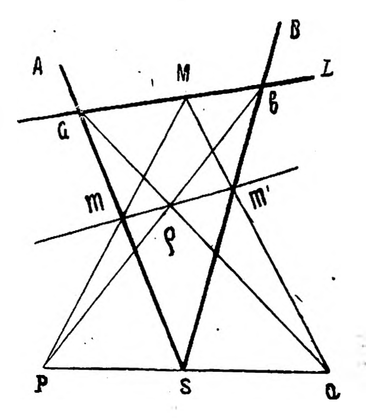
Трактатъ о Порисмахъ Евклида — одно изъ наиболѣе замѣчательныхъ по содержанiю сочиненiй этого великаго геометра. Оно извѣстно намъ только по тѣмъ свѣдѣнiямъ, которые даны о немъ въ VII книгѣ *Математическаго Сборника* Паппа и по короткой замѣткѣ Прокла въ его Комментарiи на первую книгу Евклидовыхъ *Началъ.* Паппъ приводитъ два опредѣленiя того особаго рода предложенiй, которыя Евклидъ называлъ „порисмами", общiя условiя теоремъ двадцати девяти различныхъ родовъ и двадцать восемь леммъ къ этимъ теоремамъ. Всего въ сочиненiи Евклида была 171 порисма, и сочиненiе это было раздѣлено на три книги. По этимъ даннымъ многiе геометры старались возстановить Евклидовъ трактатъ: Альбертъ Жираръ, Ферматъ, Boulliau, Renaldini, занимались этимъ вопросомъ. Роберту Симсону удалось объяснить три предложенiя Евклида, которыя Паппъ приводитъ полностью. Черезъ восемь лѣтъ послѣ смерти этого замѣчательнаго геометра появился въ свѣтъ его трудъ „De Porismatibus tractatus; quo doctrinam Porismatum satis explicatam, et in posterum ab oblivione tutam fore sperat Auctor" въ сборникѣ: *Roberti Simson,* matheseos nuper in Academia Glasguensi professoris Opera quaedam reliqua, Glasguae, 1776. Наиболѣе полное изслѣдованiе о *Порисмахъ* принадлежитъ *М. Шалю:* Les trois livres de porismes d'Euclide rétablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions; par *M. Chasles,* Paris, 1860. Шаль даетъ слѣдующее опредѣленiе порисмы (l. c., p. 54):

„*Порисмы это* неполныя *теоремы, выражающiя извѣстныя соотношенiя между вещами, измѣняющимися по общему*

закону; соотношенія эти указываются въ выраженіи порисмы, но ихъ нужно дополнить, опредѣливъ, по величинѣ и положенію, извѣстныя вещи, которыя являются слѣдствіемъ условія, и которыя были бы опредѣленными въ выраженіи теоремы въ собственномъ смыслѣ этого слова, или *полной теоремы*".

Говоря короче, *„порисма есть предложеніе, въ которомъ высказывается нѣкоторая истина и при этомъ утверждается, что можно всегда найти извѣстныя вещи, которыя эту истину дополняютъ*". Къ этому краткому опредѣленію слѣдуетъ, однако, добавить, что въ порисмахъ разсматриваются и безконечные комплексы перемѣнныхъ вещей, какъ въ вопросахъ о геометрическихъ мѣстахъ. Въ этомъ отношеніи онѣ отличаются отъ другого рода подобныхъ же предложеній, которыя древніе называли *Data*. Самое слово „порисма" происходитъ отъ глагола πορίζω — открываю путь, нахожу; этимъ словомъ древніе обозначали также *королларіи* къ теоремамъ, которыя у насъ не совсѣмъ правильно называются „слѣдствіями".

По своей формѣ Евклидовы порисмы тожественны съ большей частью предложеній Новой Геометріи. Въ нихъ много общаго съ этими предложеніями и по содержанію. Вотъ, напримѣръ, XLI порисма, реставрированная Симсономъ и Шалемъ:



Даны двѣ прямыхъ SA, SB и двѣ опредѣленныя точки P, Q, лежащія на одной прямой съ точкой S встрѣчи данныхъ прямыхъ; если изъ этихъ точекъ P и Q провести къ каждой точкѣ M прямой LM, данной по своему положенію, прямыя, встрѣчающія SA и SB въ точкахъ m и m' соотвѣтственно, то прямая mm' пройдетъ черезъ данную точку (ϱ).

Эта порисма Евклида (*Chasles,* l. c., p. 141) доставляетъ способъ преобразованія фигуръ, подобный способу взаимныхъ поляръ (*Chasles,* l. c., p. 141, note; замѣчаніе это принадлежитъ самому Понслэ, автору метода взаимныхъ поляръ;

ср. его Mémoire sur l'Analyse des Transversales, appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques, *Crelle's Journal,* t. VIII, p. 408, 1832).

Шаль приводитъ примѣры превращенія порисмъ въ полныя теоремы. Такъ, напримѣръ, предложеніе „въ гиперболѣ произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ касательной на асимптотахъ, есть величина постоянная (данная)“— порисма; предложеніе же „въ гиперболѣ произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ касательной на асимптотахъ, равно суммѣ квадратовъ полуосей“— полная теорема.

Прибавленіе 5.

Объ Архимедѣ и его сочиненіяхъ.

Къ стр. 83.

Новый свѣтъ на дѣятельность великаго ученаго древности проливаетъ открытое недавно сочиненіе его подъ заглавіемъ: Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος, найденное Гейбергомъ въ палимпсестѣ на Константинопольскомъ подворьѣ монастыря св. Гроба Господня въ Іерусалимѣ. Нѣмецкій переводъ этого сочиненія, сдѣланный Гейбергомъ, помѣщенъ вмѣстѣ съ комментаріемъ Цейтена въ Bibliotheca Mathematica, 3 Folge, Band 7. Русскій переводъ статьи Гейберга (безъ комментарія Цейтена) изданъ подъ редакціей „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“ (Одесса, 1909, книгоиздательство „Mathesis“) съ моимъ предисловіемъ: „Архимедъ и его новооткрытое произведеніе“. Книга Архимеда, считавшаяся до сихъ поръ потерянной, была извѣстна древнимъ подъ названіемъ Ἐφοδικὸν — Эфодикъ, руководство. Она связываетъ между собою главнѣйшія изъ извѣстныхъ уже сочиненій великаго геометра: о равновѣсіи плоскихъ фигуръ и о квадратурѣ параболы, о коноидахъ и сфероидахъ, о шарѣ и цилиндрѣ. Можно, повидимому, расположить всѣ эти книги въ слѣдующемъ хронологическомъ порядкѣ: 1) Двѣ книги о равновѣсіи плоскихъ фигуръ вмѣстѣ съ книгой о квадратурѣ параболы, 2) Эфодикъ, 3) Двѣ книги о шарѣ и цилиндрѣ, 4) Книга о коноидахъ и сфероидахъ. Если присоединимъ

къ этому 5) Книгу объ измѣренiи круга, 6) Псаммитъ, или исчисленiе песку, 7) Книгу объ улиткообразныхъ линiяхъ или спираляхъ и 8) Двѣ книги о плавающихъ тѣлахъ, то получимъ полный списокъ дошедшихъ до насъ подлинныхъ сочиненiй Архимеда. Въ Эфодикѣ изложены интересныя теоремы объ объемахъ нѣкоторыхъ тѣлъ и ихъ отрѣзковъ, цилиндровъ, конусовъ, шаровъ, а также сфероидовъ и коноидовъ, т. е. тѣлъ, полученныхъ отъ вращенiя эллипсовъ и параболъ около ихъ осей, или отъ вращенiя гиперболъ около ихъ поперечныхъ осей. Объемы находятся съ помощью приложенiя статики къ геометрiи, при чемъ тѣла разсматриваются, какъ состоящiя изъ безчисленнаго множества параллельныхъ круговыхъ сѣченiй, наполняющихъ ихъ объемы или объемы ихъ сегментовъ. Такая точка зрѣнiя на объемы тѣлъ, которая впослѣдствiи легла въ основанiе „метода недѣлимыхъ“ (у геометровъ XVII вѣка), не могла, конечно, давать строгихъ доказательствъ, а приводила лишь къ особаго рода эвристической методѣ. „Легче найти доказательство“, говоритъ Архимедъ въ предисловiи — посвященiи Эратосѳену, „когда мы посредствомъ метода составляемъ себѣ представленiе объ изслѣдуемомъ вопросѣ, чѣмъ сдѣлать это безъ такого предварительнаго изслѣдованiя“. Въ концѣ книги Архимедъ, какъ онъ обѣщаетъ въ предисловiи, далъ, повидимому, строгiя геометрическiя доказательства открытыхъ имъ теоремъ, но, къ сожалѣнiю, въ дошедшей до насъ рукописи ни одно изъ этихъ доказательствъ не сохранилось цѣликомъ; удалось возстановить начало только одного изъ нихъ, показывающее, однако, что Архимедъ владѣлъ общимъ методомъ доказательства подобныхъ теоремъ, заключающимъ въ себѣ зачатки теорiи предѣловъ.

Прибавленiе 6.

О Гипатiи.

Къ стр. 92.

Читатель, интересующiйся участiемъ женщинъ въ исторiи науки, прочтетъ также съ удовольствiемъ книгу *Ребьера:* Les femmes dans la science, par *A. Rebière,* съ портретами и автографами, 2-ое изд. Парижъ, 1897.

Трагическая смерть Гипатіи, звѣрски убитой въ 416 г. христіанской черныо Александріи, подстрекаемой фанатичными монахами, всегда возбуждала интересъ историковъ, потому что въ подстрекательствѣ этомъ нѣкоторые позднѣйшіе историки подозрѣвали также великаго современника Гипатіи св. Кирилла, архіепископа александрійскаго. Полная несостоятельность этого подозрѣнія доказана Копалликомъ: см. Cyrillus von Alexandrien. Eine Biographie nach den Quellen bearbeitet vor *Dr. Joseph Kopallik,* Mainz, 1881, III. Hypatia, pp. 12—43. Копалликъ устанавливаетъ также, что смерть Гипатіи послѣдовала въ мартѣ 416 г. (l. c., p. 42).

Прибавленіе 7.

Объ общихъ принципахъ и методахъ древнихъ геометровъ.

Къ стр. 93.

Нельзя утверждать, что у древнихъ совершенно отсутствовали общіе принципы и методы. Древніе не излагали такихъ методовъ, потому что такое изложеніе въ той строгой діалектической формѣ, составлявшей для нихъ самую сущность доказательства, безъ которой доказательство не считалось таковымъ (ср. Эфодикъ *Архимеда* въ русскомъ перев., посл. къ Эратосѳену, стр. 5) представляло бы затрудненія, непреодолимыя при отсутствіи общихъ теорій, далеко еще незаконченныхъ и въ наше время, теорій, которыя стали развиваться значительно позднѣе при сліяніи геометріи съ анализомъ. Какъ, напримѣръ, изложить общій методъ проведенія касательныхъ безъ общей теоріи касательныхъ? Какъ изложить эту теорію, не становясь на точку зрѣнія аналитической геометріи и дифференціальнаго исчисленія? Тѣ, которые упрекаютъ древнихъ въ отсутствіи общихъ методовъ, забываютъ упомянуть о томъ, съ какими трудностями сопряжено строгое изложеніе такихъ методовъ въ наше время и насколько оно обыкновенно бываетъ несовершеннымъ. Предложенія, относящіяся къ общей теоріи, должны были бы по необходимости принимать форму неполныхъ теоремъ или задачъ, иногда болѣе сложной природы, чѣмъ data или порисмы — тѣ виды предложеній, которыми пользовались древніе.

Съ другой стороны, у древнихъ была цѣлая система ученій, открывающая путь къ рѣшенію задачъ высшей геометріи — τόπος ἀναλυόμενος, о которомъ говорится въ VII книгѣ *Математическаго Сборника* Паппа — теорія геометрическихъ мѣстъ въ связи съ „аналитическимъ" методомъ. Пятая книга Евклидовыхъ *Началъ* представляетъ собою совершенный образецъ изложенія общей теоріи величинъ и общаго метода ихъ сравненія въ духѣ древнихъ. Подобный характеръ имѣетъ и X книга *Началъ*. Нѣкоторыя опредѣленія Аполлонія (опредѣленіе діаметровъ и осей въ *Conic., l.* I, 4 — 8), опредѣленія и постулаты Архимеда (*De Sph. et Cyl.,* def. 1—4, post. 1—5), алгебраическія леммы Архимеда въ книгѣ о коноидахъ и сфероидахъ, введеніе въ книгу о спираляхъ, тоже совершенно общаго характера. „Эфодикъ" Архимеда представляетъ собою образецъ изложенія эвристическаго метода — открываетъ намъ впервые ту сторону работы греческихъ математиковъ, которая, по словамъ самого Архимеда, состоитъ изъ „разсужденій, основанныхъ на методѣ, но не являющихся еще доказательствами". Эта сторона работы древнихъ геометровъ оставалась для насъ до сихъ поръ неизвѣстной — можетъ быть, потому, что они, по большей части, не издавали сочиненій, въ которыхъ излагались бы послѣдовательно эвристическіе методы, приводившіе ихъ къ ихъ открытіямъ, а, можетъ быть, и потому, что современники ихъ предпочитали знакомиться съ этими открытіями въ ихъ блестящей діалектической обработкѣ и забывали мало-по-малу о болѣе скромныхъ „Эфодикахъ", полезныхъ, только какъ руководства для дальнѣйшей самостоятельной разработки науки.

Прибавленіе 8.

Сумма членовъ геометрической прогрессіи со знаменателемъ 7.

Къ стр. 126, 238.

Объясненіе таинственной задачи египетскаго папируса о суммѣ членовъ геометрической прогрессіи со знаменателемъ 7 предложено впервые оріенталистомъ *Л. Родэ,* который при своемъ объясненіи руководился аналогіей этой

задачи съ задачей Леонарда (см. *L. Rodet,* Les prétendus problèmes d'algèbre du Manuel du Calculateur égyptien [Papyrus Rhind], Extrait du *Journal Asiatique,* 1881, Paris 1882, Appendice, pp. 111 suiv.). Объясняя рѣшеніе этой задачи аналогичными примѣрами, заимствованными у арабскихъ математиковъ (прогрессія со знаменателемъ 2), Родэ выставляетъ начало, весьма полезное при изслѣдованіяхъ въ области исторіи математики, служащее основаніемъ сравнительнаго метода, которымъ Родэ съ успѣхомъ пользуется во всѣхъ своихъ работахъ по исторіи математики у восточныхъ народовъ. Это начало Родэ называетъ „принципомъ сохраненія задачъ и методовъ вычисленія" (l. c., p. 114). Вѣрность принципа Родэ замѣтна, главнымъ образомъ, въ такія эпохи исторіи науки, когда она носила, такъ сказать, общенародный характеръ, не была еще исключительнымъ достояніемъ отдѣльнаго класса ученыхъ, и для такихъ отдѣловъ науки, которые и въ другія эпохи сохраняли тотъ же общенародный характеръ. Но и въ другихъ случаяхъ этотъ принципъ сохраняетъ полную силу. Онъ представляетъ лишь слѣдствіе болѣе общаго культурно-историческаго закона. Подтвержденіемъ принципа Родэ является интересная задача, приводимая Кэджори изъ ариѳметики Адамса (стр. 238). Вотъ еще такая же русская народная задача, записанная мною со словъ моей няни Е. Я. Петровской, родомъ изъ Орловской губерніи, которая была живымъ сборникомъ русскаго фольклора:

Шли семь старцевъ,
У каждаго старца по семи костылей,
На всякомъ костылѣ по семи сучковъ,
На каждомъ сучкѣ по семи кошелей,
Въ каждомъ кошелѣ по семи пироговъ,
А въ каждомъ пирогѣ по семи воробьевъ.

Сколько всего (т. е. всѣхъ старцевъ, костылей, сучковъ, кошелей, пироговъ и воробьевъ)?

Было бы, разумѣется, очень интересно знать происхожденіе подобныхъ задачъ, такъ упорно сохраняемыхъ народнымъ преданіемъ въ теченіе тысячелѣтій, несмотря

на полную ихъ непрактичность и безсмысленность, исключающую даже возможность смотрѣть на нихъ, какъ на „математическія развлеченія“. Но это именно обстоятельство и затрудняетъ рѣшеніе вопроса о происхожденіи задачи о суммѣ геометрической прогрессіи. Быть можетъ, первоначальныя задачи такого рода были миѳологическаго характера; такой же характеръ имѣетъ, можетъ быть, и знаменитая „задача о быкахъ“ (см. стр. 35), которая до сихъ поръ представляетъ загадку для историковъ математики (ср. *Cantor,* I, 3-te Aufl., pp. 312—313, *Heath,* Diophantos of Alexandria, pp. 142 — 147). Такія задачи могли появиться гораздо раньше, чѣмъ ихъ рѣшенія, и трудность рѣшенія, недоступность его извѣстной эпохѣ отнюдь не доказываетъ болѣе поздняго происхожденія задачи. Если задачи эти дѣйствительно носили вначалѣ миѳологическій характеръ, то рѣшеніемъ могли въ то время вовсе и не интересоваться.

Интересной чертой упомянутыхъ нами задачъ на геометрическую прогрессію является присутствіе въ ихъ условіяхъ одного и того же числа 7 (которое играетъ нѣкоторую роль и въ „задачѣ о быкахъ“). У всѣхъ древнихъ народовъ число это имѣло священное значеніе и входило въ различныя миѳологическія представленія. (*Roscher,* Sieben-und Neunzahl, Fristen; *Roscher,* Die Hebdomadenlehren der griech. Philosophen u. Ärzte, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. der Wissensch., XXIV, Nr. VI). Оно связано было, кромѣ того, съ идеей полноты или законченности; у вавилонянъ число 7 называлось иногда *Kiššatu* —„полнота, совокупность“ (такъ передавали вавилоняне на своемъ языкѣ число 7 въ сумерійскихъ текстахъ, хотя сумерійское названіе семи построено по пятиричной системѣ — imina = ia + min = 5 + 2). Нѣкоторые ученые связывали значеніе числа 7 съ вавилонскимъ культомъ семи планетъ. Такое объясненіе очень маловѣроятно. Легче объяснить себѣ связь числа 7 съ дѣленіемъ на седмицы 28-ми дневнаго луннаго мѣсяца (ср. *J. Hehn.* Siebenzahl und Sabbat bei den Babyloniern und im Alten Testament. Eine Religionsgeschichtliche Studie. Leipzig, 1907 — Leipziger Semitistische Studien, II, 5).

Прибавленіе 9.

„Algorismus proportionum" Николая Орема.

Къ стр. 129.

Обозначенія Орема находятся въ сочиненіи его *Algorismus Proportionum,* найденномъ М. Курце въ рукописи библіотеки Королевской гимназіи въ Торнѣ и напечатанномъ въ 1868 году. (См. Der Algorismus Proportionum des *Nicolaus Oresme,* zum ersten Male nach der Lesart der Handschrift R. 4°.2 der Königlichen Gymnasial-Bibliothek zu Thorn herausgegeben von *E. L. W. M. Curtze.* Mit ein. lithogr. Tafel und einem photogr. Facsimile d. Handschrift. Berlin 1868. Ср. статью Курце въ Zeitschr. f. Math. u. Ph., XIII Jahrg., Heft 2: Ueb. die Handschr. R. 4°. 2, Problematum Euclidis explicatio, der K. Gymnasialbibl. zu Thorn). Всѣ правила Оремова алгориѳма изложены Курце въ современной алгебраической формѣ въ введеніи въ это изданіе (l. c., pp. 10—11).

Показатели Орема не суть, однако, показатели въ современномъ значеніи этого термина, а *логариѳмы* въ полномъ смыслѣ слова, т. е. числа, показывающія, какъ различныя отношенія составлены изъ даннаго путемъ дробленія его на доли и сложенія полученныхъ „долей". Подъ сложнымъ отношеніемъ Оремъ разумѣлъ, какъ и древніе геометры, отношеніе, устанавливаемое совокупностью отношеній такого рода, что послѣдующій членъ каждаго изъ нихъ служитъ предыдущимъ членомъ слѣдующаго; отношеніе $a:b$ разсматривается, какъ результатъ сложенія отношеній $a:c$, $c:d$ и $d:b$; эти послѣднія отношенія суть части отношенія $a:b$. Если части эти равны, то каждая изъ нихъ есть соотвѣтствующая доля отношенія $a:b$; такъ, если

$$a:c=c:d=d:b,$$

то отношеніе $a:b$ втрое больше каждой изъ своихъ частей $a:c$, $c:d$ и $d:b$, а каждая изъ этихъ частей есть треть отношенія $a:b$. Такъ, знакъ 1 *p.* $\frac{1}{2}$ выражаетъ, что разсматриваемое отношеніе $a:b$ есть $\frac{3}{2}$ основного $\alpha:\beta$, или что

$$\alpha:\gamma=\gamma:\delta=\delta:\beta,$$

а

$$\alpha:\varepsilon=\varepsilon:\beta=\gamma:\delta.$$

Algorismus Proportionum содержитъ изложенiе правилъ Оремова алгориѳма и приложенiе ихъ къ геометрiи. Теорiя разложенiя отношенiй (proportiones) на части и составленiе ирраціональныхъ отношенiй изъ раціональныхъ посредствомъ раздробленiя этихъ послѣднихъ на доли и сложенiя этихъ долей изложена въ другомъ сочиненiи Орема *Proportiones* или *Tractatus proportionum,* которое было напечатано нѣсколько разъ. Оремъ говоритъ здѣсь не только о раціональныхъ логариѳмахъ отношенiй, но и о приближенномъ выраженiи отношенiй, не имѣющихъ раціональныхъ логариѳмовъ: „proportio est nota", говоритъ онъ, „quando eius denominatio est scita"—„отношенiе извѣстно, когда извѣстно его знаменованiе", опредѣляющее его число, логариѳмъ. „Aliquarum autem proportionum scilicet omnium rationabilium et quarundam irrationabilium denominationes sunt scibiles et aliquarum irrationabilium non sunt scibiles" — „знаменованiя же нѣкоторыхъ отношенiй, а именно всѣхъ раціональныхъ и нѣкоторыхъ ирраціональныхъ, можно знать, знаменованiя же нѣкоторыхъ другихъ ирраціональныхъ отношенiй непознаваемы"... „Verum tamen de qualibet proportione nobis data vel danda poterimus investigare: ... utrum ipsa sit maior vel minor tali proportione irrationabili incognoscibili et innominabili: et sic tandem poterimus investigare duas proportiones satis propinquas: ad quas talis proportio ignota se habebit: ita quod erit minore maior et maiore minor: et hoc debet sufficere"—„однако же, всякое данное или искомое отношенiе мы можемъ изслѣдовать и узнать, больше оно или меньше такого непознаваемаго и невыразимаго ирраціональнаго отношенiя; и такимъ образомъ мы сможемъ, наконецъ, ввести въ изслѣдованiе два достаточно близкiя другъ къ другу отношенiя такого рода, что данное неизвѣстное отношенiе будетъ меньше большаго изъ нихъ и больше меньшаго; и этимъ мы должны довольствоваться". (См. Proportiones *Nicholai Horen,* Cap. IIII, Сборникъ Questio de modalibus Bassoni Politi etc., Venet., 1505, f. 24, col. II). Въ сочиненiи Орема впервые ясно поставленъ знаменитый впослѣдствiи вопросъ объ ариѳметическомъ измѣренiи отношенiй. Практическое рѣшенiе этой задачи было дано впер-

вые лишь Неперомъ въ его теоріи логариѳмовъ. Съ такой точки зрѣнія сочиненіе Орема очень замѣчательно и напрасно Канторъ (который, впрочемъ, говоритъ объ немъ лишь со словъ Курце) посвящаетъ ему такъ мало вниманія (ср. *Cantor,* II, 2-te Aufl., pp. 132—133). Свѣдѣнія о геніальномъ средневѣковомъ ученомъ и его ученыхъ трудахъ читатель найдетъ въ упомянутыхъ уже нами статьяхъ Курце и его же статьѣ Die Mathematischen Schriften des Nicole Oresme, 1870; см. также *Cantor,* II, 2-te Aufl., pp. 128—137. Позднѣйшіе ученые въ эпоху возрожденія математическихъ наукъ тоже излагаютъ алгориѳмъ отношеній въ духѣ Орема. Такую теорію находимъ мы у Тартальи (General trattato di numeri et misure, Vinegia, 1556, Seconda parte, Cap. II, sqq. ff. 110 v. sqq.), гдѣ дѣленіе отношеній ставится въ связь съ извлеченіемъ корней („la quarta parte della proportione da — 5. a 4. sara questa da *R R* 5. a *R R* 4."— т. е. „четвертая часть отношенія 5 къ 4 равна отношенію $\sqrt{\sqrt{5}}$ къ $\sqrt{\sqrt{4}}$"— *l. c.*— esempio secondo, f. 126 r.— marg; „произведеніе" отношенія 5:4 на $\frac{2}{3}$ равно отношенію 25 къ *R* cu 10000, т. е. $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{25}{16}} = \frac{25}{\sqrt[3]{10000}}$, „частное" отъ дѣленія 2:1 на $\frac{3}{4}$ равно отношенію *R* cu. 16 къ 1, т. е. $\sqrt[\frac{3}{4}]{2} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{16}$. Cap. XI, f. 127 v.), и у Стифеля (Arithmetica integra, Norimbergae, 1543), который прилагаетъ алгориѳмъ пропорцій къ музыкѣ и ссылается при этомъ на Іордана Неморарія и другихъ ученыхъ, которыхъ онъ не называетъ (l. c., Algorithmus proportionum, ff. 52 r. sqq.). Какъ у Стифеля, такъ и у Тартальи встрѣчаемъ мы при этомъ и разсужденія объ аналогіи геометрической и ариѳметической прогрессій, имѣющей связь какъ съ алгориѳмомъ отношеній, такъ и съ теоріей логариѳмовъ (Gen. trattato — sec. parte, Libro Ottavo, ff. 131 r. sqq., Arithm. integra — ff. 35 r. sqq.— Sequitur utilis quaedam tractatio, ut progressioni Arithmeticae respondeat Geometrica progressio; cp. Lib. tertius, Cap. V, ff. 248 v. sqq.).

Grammateus (Heinrich Schreiber) написалъ въ 1514 году книгу подъ заглавіемъ *Algorismus proportionum* (*Cantor,* II, 2-te Aufl., p. 395). Позднѣйшіе авторы, писавшіе уже послѣ открытія логариѳмовъ, ставили ихъ теорію въ связь съ дѣленіемъ отношеній; см., напримѣръ, *M. Mercator,* Logarithmotechnia, Londini, 1668, pp. 1—3; *R. Cotes,* Harmonia Mensurarum, Cantabrigiae, 1722, pp. 1—5.

Прибавленіе 10.

„О древне-индусской геометріи".

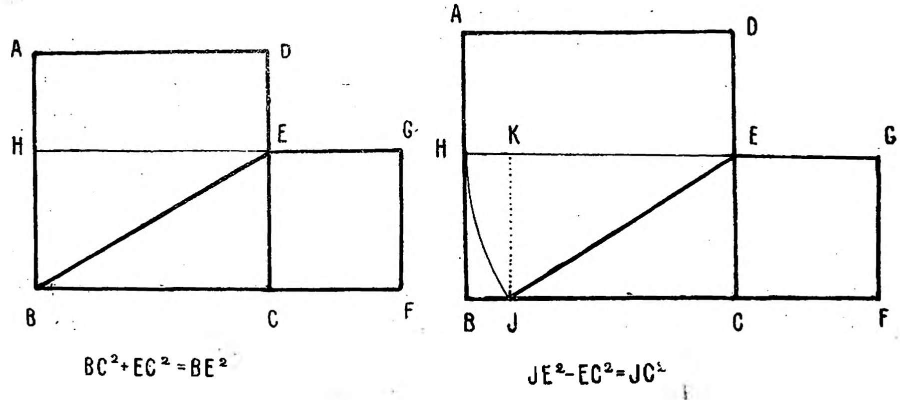
Къ стр. 130.

Древнѣйшими математическими памятниками индусовъ являются *Сульва-сŷтры* — правила снурка — предписанія для построенія брахманскихъ жертвенниковъ. Одну изъ этихъ книгъ, авторомъ которой былъ *Баудхâяна*, издалъ съ англійскимъ переводомъ *G. Thibaut* въ журналѣ *Pandit,* Vol. IX, ff.; тамъ же (New Series, Vol. IV) издалъ онъ часть другой сŷтры, которую написалъ *Кâтьяяна.* Третья книга, *Âпастамбы,* издана съ нѣмецкимъ переводомъ А. Бюркомъ (*Albert Bürk,* Das Āpastamba-'Sulva-Sūtra, herausg., übers. und mit einer Einleitung versehen. Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellsch., LV и LVI). Ср. *G. Thibaut.* On the 'Sulvasûtras, Journ. of the Asiat. Soc. of Bengal, XLIX; *Cantor,* Gräco-indische Studien, Ztschr. f. Math. u. Ph., XXII, Hist. lit. Abth. (1877). *Его же,* Ueber die älteste indische Mathematik, Archiv d. Math. u. Phys., 3. Reihe, VIII (1904). Родэ перевелъ на французскій языкъ нѣкоторыя задачи изъ книги Баудхâяны: см. *Bulletino Boncompagni,* T. XVI, 1883, Problèmes de géom. pratique de Mydorge, publ. p. *M. Ch. Henry* avec des commentaires orientaux de *M. L. Rodet.* Трудно опредѣлить точно время, когда жили авторы Сульва-сŷтръ. Бюркъ, основываясь на изысканіяхъ Бюлера (*Bühler,* Introduction to Âpastamba, Sacred Books of the East, Vol. II, pp. XL—XLIII), полагаетъ, что Âпастамба принадлежитъ, по крайней мѣрѣ, IV или V вѣку до Р. Х.; по Бюлеру же (l. c., pp. XXII

и XXIV), Баудхâяна жилъ не менѣе, чѣмъ за 200 лѣтъ до Âпастамбы. Эта древнѣйшая индусская геометрія была, повидимому, независима отъ греческой: теорема о квадратѣ гипотенузы была извѣстна въ Индіи, по меньшей мѣрѣ, въ VIII вѣкѣ до Р. X.: на этой теоремѣ основаны, главнымъ образомъ, рѣшенія задачъ, встрѣчающихся въ Сульва-сȳтрахъ. Слѣды пользованія Пиѳагоровой теоремой находятся уже въ еще болѣе древнихъ индусскихъ книгахъ *Таиттирійя Самхитâ* и *Сатапатха-Брâхмана* (*Bürk,* l. c., Bd. 55, pp. 553—556). Индусы рѣшали задачи, о которыхъ идетъ рѣчь, построеніями (на мѣстѣ алтаря) помощью натягиванія шнурковъ или веревокъ, снабженныхъ петлями или кольцами; точно такъ же, вѣроятно, рѣшали такія задачи и древнеегипетскіе *гарпедонапты* (ср. стр. 47). Подобно египтянамъ и индусы пользовались прямоугольными треугольниками съ раціональными сторонами: треугольникъ 39, 36, 15 (5, 12, 13) встрѣчается еще въ *Т. С.* и *С. Б.* (*Bürk,* l. c., Bd. 55, pp. 553, 554). Баудхâяна и Âпастамба даютъ уже общія правила сложенія и вычитанія квадратовъ, основанныя на Пиѳагоровой теоремѣ [*Rodet*, l. c. (Extrait, p. 19) — Sur le problème 53; *Bürk,* l. c., Bd. 56, Cap. II, 4, 5, pp. 332, 333], не говоря объ *удвоеніи* и *утроеніи* квадратовъ (построеніе *двикарани* и *трикарани* — стороны квадрата вдвое или втрое больше даннаго), а также превращеніе прямоугольниковъ въ квадраты и обратно (*Bürk,* l. c., Bd. 56, Cap. III,1, pp. 333, 334) и рѣшенія другихъ, болѣе сложныхъ задачъ о прямолинейныхъ площадяхъ и кругахъ. Для сложенія квадратовъ, т. е. для нахожденія стороны квадрата, равновеликаго двумъ даннымъ, Âпастамба даетъ такое правило:

„Отрѣзать стороной (*EC*) меньшаго квадрата (*ECFG*) часть большаго (*ABCD*)“, т. е. прямоугольникъ *HBCE*. „Діагональ (*BE*) отрѣзанной части (*HBCE*) соединяетъ оба данныхъ (квадрата), сообразно со сказаннымъ раньше“. Въ гл. I, 4 сказано: „Діагональ прямоугольника даетъ столько же, сколько даютъ большая и меньшая стороны его въ отдѣльности“ (*Bürk,* l. c., Bd. 56, pp. 328—329), т. е. квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ. Для вычисленія квадратовъ Âпастамба предписываетъ слѣдующее:

„... отрѣзать стороной (EC) вычитаемаго квадрата отъ большаго ($ABCD$) часть (прямоугольникъ $HBCE$) и провести большую сторону (HE) отрѣзанной части попе-



рекъ ея до встрѣчи съ другой стороной (BC). Въ мѣстѣ встрѣчи (J) отрѣзать (т. е. часть JC). Такимъ образомъ вычитанiе будетъ произведено".

Трудно рѣшить вопросъ о томъ, открыта ли теорема о прямоугольномъ треугольникѣ индусами самостоятельно, и какъ могли они прiйти къ убѣжденiю въ справедливости этой теоремы. Бюркъ [l. c., Bd. 55, Einleitung (über Herkunft und Entwicklung der ältesten indischen Geometrie), § 3. Weg der Auffindung des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse, pp. 556—576] старается показать, что теорема эта найдена индусами самостоятельно, и предполагаетъ, что индусы пришли къ ней индуктивнымъ путемъ, доказывая справедливость ея въ различныхъ случаяхъ треугольниковъ съ рацiональными сторонами. Я думаю, однако, что уже во времена Âпастамбы индусскiе геометры могли убѣдиться непосредственно въ справедливости теоремы, разсматривая фигуры, подобныя тѣмъ, которыя мы находимъ у Бхаскары.

Прибавленiе 11.

Доказательства Пиѳагоровой теоремы у Бхаскары.

Къ стр. 130—131.

Оба доказательства теоремы находятся въ гл. V *Виджаганиты* (§§ 146, 147, *Colebrooke,* pp. 220—223). Кэджори

неправъ, утверждая, что все объясненіе теоремы сводится къ фигурѣ и слову „смотри“. Индусы обыкновенно при всѣхъ своихъ фигурахъ писали слово „смотри“; подобнымъ же образомъ поступаемъ и мы, желая поставить фигуры въ связь съ опредѣленнымъ словомъ или предложеніемъ. Напротивъ, Бхаскара сначала разсказываетъ, какъ строится первая фигура (§ 146), а затѣмъ (§ 147) говоритъ: „расположивъ тѣ же части фигуры иначе, смотри“. Комментаторъ Бхаскары *Кришна* замѣчаетъ: „продолживъ линію (т. е. лѣвую сторону квадрата на второмъ чертежѣ), мы раздѣлимъ фигуру на два квадрата: одинъ — квадратъ большаго катета, другой — квадратъ меньшаго катета: и сумма ихъ равна площади перваго большаго квадрата; корень же квадратный изъ нея есть сторона четырехугольника“. Бхаскара сначала даетъ доказательство, основанное на подобіи треугольниковъ, а затѣмъ, построивъ первую изъ приведенныхъ у Кэджори фигуръ, выводитъ „правило“: „удвоенное произведеніе катетовъ, сложенное съ квадратомъ ихъ разности, равно суммѣ ихъ квадратовъ, совершенно какъ и для двухъ неизвѣстныхъ количествъ“, т. е. такъ же, какъ $2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$. Отсюда, наоборотъ, сравнивая вторую фигуру съ первой, можно вывести предложеніе о квадратѣ гипотенузы. Таковъ смыслъ разсужденія Бхаскары. Нужно прибавить, что вообще стиль разсужденій индусскихъ математиковъ очень сильно отличается отъ строгой діалектической формы греческихъ доказательствъ.

Прибавленіе 12.

Объ опредѣленіи „логариѳма“ у Непера.

Къ стр. 167.

Понятіе о логариѳмической функціи сложилось первоначально изъ представленій, заимствованныхъ изъ области безконечно-малыхъ. Неперово опредѣленіе (въ нѣсколько измѣненномъ видѣ — для натуральныхъ логариѳмовъ) соотвѣтствуетъ формулѣ:

$$d(a \log_n x) : a = dx : x.$$

Найденное Гр. Ст. Винцентомъ свойство гиперболы (стр. 177) соотвѣтствуетъ формулѣ

$$a^2 \log_n x = \int_1^x \frac{a^2\, dx}{x}.$$

Эти формулы, конечно, были найдены тотчасъ послѣ открытія дифференціальнаго исчисленія. Но Лейбницъ въ то же время связалъ теорію логариѳмической функціи съ анализомъ конечныхъ величинъ, обобщивъ понятіе о степени и введя обратную функцію логариѳма — показательную. См. De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa. Act. Erud. L. an. 1682. *Leibniz.* Math. Schr., herausg. v. *Gerhardt,* Zw. A., Bd. I, VI, p. 120; Epistola Leibn. ad. Joh. Bernoulium, Hanov., 7 Jun. 1694; *Leibn.,* Math. Sch., h. v. *Gerh.,* p. 141; Иванъ Бернулли называлъ показательныя величины *„percurrentes"*, Ep. ad. L., Basileae, 9. Maj. st. v. 1694, *Leibn.,* M. S., h. v. *Gerh.,* pp. 139, 140; онъ изложилъ теорію ихъ въ письмѣ къ Лейбницу, Bas., 2. Sept. 1694, *Gerh.,* l. c., pp. 144 — 151; *Joh. Bernoulli.* Opera omnia. Tom. I, Lausanae & Genevae 1742, № 36, Principia Calculi Exponentialium, seu Percurrentium (Acta Er., Lips., 1697, Mart., pp. 125 sqq.), pp. 179 — 187. Еще раньше опубликованія теоріи Ив. Бернули (въ 1697 г.) Вариньонъ (въ 1695 г.) пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, о чемъ и составилъ записку, которая была, однако, опубликована только послѣ его смерти; см. Eclaircissements sur l'Analyse des infin. petits par *M. Varignon,* Paris, 1725, pp. 100, 108 — 118. — Эйлеръ, слѣдуя своимъ предшественникамъ, начинаетъ въ своемъ „Введеніи въ анализъ безконечно-малыхъ" (Introductio in Analysin infinitorum, Laus., 1748, Cap. VI) изученіе элементарныхъ трансцендентныхъ съ разсмотрѣнія показательныхъ функцій.

Я приведу въ подлинникѣ замѣчательныя опредѣленія, данныя Неперомъ въ первой главѣ первой книги его сочиненія „Mirifici canon. log. descriptio":

1. Def. Linea aequaliter crescere dicitur, quum punctus eam describens, aequalibus momentis per aequalia intervalla progreditur

2. Def. Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens aequalibus momentis segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas, a quibus abscinduntur.

3. Def. Quantitates surdae, seu numero inexplicabiles, numeris quàm proximè definiri dicuntur, quum numeris majusculis, qui à veris surdarum valoribus unitate non differant, definiuntur.

4. Def. Synchroni motus sunt, qui simul & eodem tempore fiunt.

5. Def. & postul. Quum quolibet motu & tardior & velocior dari possit, sequetur necessariò cuique motui aequivelocem (quem nec tardiorem, nec velociorem definimus) darī posse.

6. Def. Logarithmus ergò cujusque sinus, est numerus quam proximè definiens lineam, quae aequaliter crevit intereà dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono atque initio aequiveloce.

(См. *Descriptio,* pp. 1 — 3; ср. замѣчанія и слѣдствія, pp. 1 — 5).

Въ переводѣ:

Опр. 1. Говорятъ, что линія растетъ равномѣрно, когда описывающая ее точка проходитъ въ равные моменты равные промежутки. — *Опр. 2.* Говорятъ, что линія сокращается пропорціонально, когда пробѣгающая по ней точка въ равные моменты отсѣкаетъ отрѣзки, сохраняющіе постоянно одно и то же отношеніе къ тѣмъ линіямъ, отъ которыхъ они отсѣкаются. — *Опр. 3.* Говорятъ, что количества ирраціональныя, или невыразимыя числомъ, опредѣляются числами съ наибольшимъ приближеніемъ, когда они опредѣляются большими числами, отличающимися отъ истинныхъ значеній ирраціональныхъ количествъ меньше, чѣмъ на единицу. — *Опр. 4.* Синхронными движеніями называются тѣ, которыя происходятъ вмѣстѣ и въ теченіе одного и того же времени. — *Опр. 5* и *постулатъ.* Такъ какъ существуютъ движенія, какъ болѣе медленныя, такъ и болѣе быстрыя, чѣмъ всякое данное движеніе, то отсюда необходимо слѣдуетъ, что существуетъ движеніе равнобыстрое всякому

данному (которое мы опредѣляемъ, какъ движенiе ни болѣе медленное ни болѣе быстрое, чѣмъ данное). — *Опр. 6.* Логариѳмомъ всякаго синуса называется, наконецъ, число, опредѣляющее съ наибольшимъ приближенiемъ линiю, возрастающую равномѣрно, между тѣмъ какъ линiя полнаго синуса убываетъ пропорцiонально до величины даннаго синуса, при чемъ оба движенiя синхронны и въ началѣ равнобыстры.

Прибавленiе 13.

Теорiя мнимыхъ величинъ у Бомбелли.

Къ стр. 244.

Сочиненiе Бомбелли содержитъ очень замѣчательную теорiю мнимыхъ величинъ; по своимъ обозначенiямъ и по формальному характеру своему эта теорiя стоитъ гораздо ближе къ современной, чѣмъ позднѣйшiя теорiи до Гаусса. Первые аналисты столкнулись съ мнимыми выраженiями при изслѣдованiи опредѣленныхъ частныхъ вопросовъ анализа, но считали ихъ безполезными: „.... & hucusque progreditur Arithmetica subtilitas", говоритъ Карданъ, разсматривая формулу $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40$, „cuius hoc extremum ut dixit, adeò est subtile, ut sit inutile" (*H. Cardani* Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis liber, Basileae, 1570, Cap. XXXVII, Regula II, Demonstratio, p. 131). Бомбелли первый оцѣнилъ значенiе мнимыхъ выраженiй, задался цѣлью привести къ виду $a + b\sqrt{-1}$ формулы рѣшенiя цѣлаго класса однородныхъ задачъ и изложилъ съ величайшей точностью и обстоятельностью алгориѳмъ мнимыхъ выраженiй указаннаго вида. Такимъ образомъ, Бомбелли первый положилъ начало собственно *теорiи* мнимыхъ количествъ и въ этомъ отношенiи заслуга его очень велика, хотя, къ сожалѣнiю, не всегда правильно оцѣнивалась историками математики; даже Канторъ удѣляетъ теорiи Бомбелли очень мало вниманiя (ср. *Cantor,* II, 2-te Aufl., 623). Справедливую оцѣнку и обстоятельный разборъ этой теорiи мы находимъ у *P. Cossali.* Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra. Vol. II, Parma, 1799, Capo V, *Calcolo delle radici immaginarie presso Cardano, e Bombelli,* pp. 285 sqq

„Я нашелъ“, говоритъ Бомбелли, „другой родъ связанныхъ кубическихъ корней (R. c. legate — корни кубическіе изъ биномовъ вида $a + \sqrt{b}$), значительно отличающійся отъ другихъ, возникающій при рѣшеніи уравненій вида $x^3 = px + q$ (Capitolo di cubo eguale à tanti e numero), когда $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$ (quando il cubato dell terzo delli tanti è maggiore del quadrato della meta del numero)...; этого рода квадратные корни, въ своемъ алгориѳмѣ, подчиняются правиламъ, отличнымъ отъ тѣхъ, которымъ подчиняются другіе корни, и носятъ особыя названія;... разность $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ (по извлеченіи квадратнаго корня) не можетъ быть названа ни положительной ни отрицательной (non si può chiamare ne più, ne meno), поэтому я буду называть ее più di meno, когда она должна прибавляться, а въ тѣхъ случаяхъ, когда она должна отниматься, я буду называть ее meno di meno...; корни этого рода покажутся многимъ скорѣе софистическими, чѣмъ имѣющими дѣйствительное значеніе; такого же мнѣнія держался и я до тѣхъ поръ, пока не нашелъ доказательства (вѣрности своихъ выводовъ) на линіяхъ“. Присоединеніе къ числу наименованія *più di meno* или *meno di meno* равносильно такимъ образомъ умноженію его на $+i$ или $-i$. Такъ *più di meno* $R. q.$ 5 означаетъ $\sqrt{5}.\, i$, *meno di meno* 3 означаетъ $-3i$.

„.... прежде всего“, продолжаетъ Бомбелли, „я буду говорить объ умноженіи и установлю правило знаковъ (la regola del più & meno“. Затѣмъ слѣдуетъ 8 правилъ:

1. Più via più di meno fa più di meno, т. е. $+1.+i = +i$,
2. Meno via più di meno fa meno di meno, „ „ $-1.+i = -i$,
3. Più via meno di meno fa meno di meno, „ „ $+1.-i = -i$,
4. Meno via meno di meno fa più di meno, „ „ $-1.-i = +i$,
5. Più di meno via più di meno fa meno, „ „ $+i.+i = -1$,
6. Più di meno via men di meno fa più, „ „ $+i.-i = +1$,
7. Meno di meno via più di meno fa più, „ „ $-i.+i = +1$,
8. Meno di meno via men di meno fa meno, „ „ $-i.-i = -1$.

См. *R. Bombelli,* L'Algebra parte maggiore dell'Arimetica. Nuovamente posta in luce, in Bologna, 1572, Lib. I, À partire per un Trinomio composto di R. c. legate, e numero, p. 169.

Во второй книгѣ своей Алгебры (Lib. I, Capitolo di Cubo eguale à Tanti e numero, pp. 293—295) Бомбелли приложилъ свой алгориѳмъ къ изслѣдованію неприводимаго случая уравненій 3-й степени. Ему удалось съ помощью очень изящнаго метода, подобнаго тому, которымъ пользовался уже Тарталья для извлеченія кубическихъ корней изъ биномовъ вида $a+\sqrt{b}$, извлечь въ дѣйствительности корни изъ мнимыхъ выраженій въ формулѣ неприводимаго случая,— по крайней мѣрѣ, въ извѣстныхъ случаяхъ,— и такимъ образомъ доказать для этихъ случаевъ вещественность корней уравненія 3-й степени. Такъ, напримѣръ, $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{121}.i}=2\pm i$; слѣдовательно, для выраженія корня уравненія $x^3=15x+4$ получаемъ формулу: $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{121}.i}+\sqrt[3]{2-\sqrt{121}.i}=$ $=(2+i)+(2-i)=4$. (*Bombelli*, Algebra, p. 294). Сущность метода Бомбелли состоитъ въ приравниваніи кубическаго корня изъ мнимаго бинома неопредѣленному биному того же вида (ср. *Hankel*, pp. 373, 374; *Cantor*, II, 2-te Aufl., 624—625). Бомбелли даетъ также геометрическое объясненіе рѣшаемыхъ имъ уравненій (dimostratione in linee), въ которомъ нельзя, однако, усмотрѣть ни малѣйшей попытки геометрической интерпретаціи мнимыхъ величинъ.

Прибавленіе 14.

Алгебраическія обозначенія у математиковъ XVI и XVII столѣтій.

Къ стр. 245, 250.

Въ дополненіе къ формуламъ, приведеннымъ у Кэджори, я даю еще нѣсколько интересныхъ примѣровъ алгебраическихъ обозначеній.

Я привожу сначала примѣры обозначеній нѣмецкой школы, начиная съ формулъ, заимствованныхъ изъ сочиненія *Кристофа Рудольфа*: Die Coß Cristoph Rudolphs. Mit schönen Exempeln der Coß durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehret. Königsperg 1553. Das neund Capitel. Lehrt einen Algorithmum zu

Lat. genannt de surdis quadratorum de quadratis. (См. *Drechsler*. Scholien zu Chr. R. Coss. Dresden. Gymnas.— Progr., 1851, p. 29).

√64 und ww81 fac. ww4096 und ww81
√16 und www8 fac. √. www4096 und √. www64,

т. е.

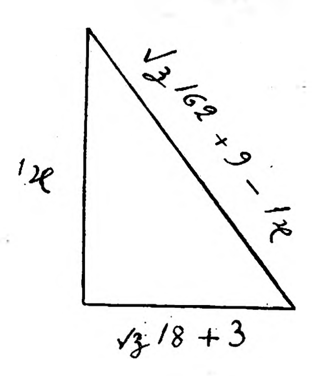
$$\sqrt{64}\cdot\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{4096}+\sqrt[4]{81},$$

$$\sqrt{16}+\sqrt[3]{8}=\sqrt{\sqrt[3]{4096}}+\sqrt{\sqrt[3]{64}}.$$

Знаки + и — встрѣчаются еще въ сочиненіяхъ нѣмецкихъ математиковъ XV столѣтія, у Видмана (ср. стр. 148—149) и въ Дрезденской рукописи Codex c. 80, которой пользовался Видманъ (См. *H. E. Wappler*, Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert, Zwickau, Gymnas.—Progr., 1887). Тамъ же находятся и нѣкоторые знаки для неизвѣстной и ея степеней, встрѣчающіеся потомъ у позднѣйшихъ нѣмецкихъ алгебраистовъ.

Уравненіе

116 + √ȝ 41472 — 18 ℞ — √ȝ 648 ȝ aequantur 0



— первый примѣръ уравненія съ нулемъ во второй части (*Cantor*, II, 2-te Aufl., 441). Это уравненіе относится къ рѣшенію прямоугольнаго треугольника, изображеннаго на чертежѣ. Чертежъ и уравненіе взяты изъ сочиненія Стифеля *Arithmetica integra*, 1544 (Lib. III, Cap. XI, f. 283 r.). Уравненіе Стифеля слѣдуетъ читать такъ:

$$116+\sqrt{41472}-18x-\sqrt{648}\,.\,x^2=0.$$

Выраженіе

√ȝ (12 + √ȝ 16) + √ȝ (12 — √ȝ 16)

заимствовано изъ *Алгебры* Христофора Клавія (Schlüssel) изъ Бамберга: *Clavius*. Algebra, Genevae, 1609, Cap. XXIII. De multiplic. ac divisione numerorum irrationalium composit. et diminutorum., p. 131; оно означаетъ $\sqrt{12+\sqrt{6}}+\sqrt{12-\sqrt{6}}$; въ этомъ выраженіи употребляются скобки.

Габлица

	√ 3		√ 5		√ 15
	√ 3		√ 12		√ 36, ou bien 6
	√ 5		6		√ 180
Multipliez	cc 4	par	cc 16	viendra	cc 64, ou 4
	√ 5		cc 4		($\frac{1}{6}$) 2000
	W_ 2		W 8		W 16, ou 2.

принадлежитъ Альберту Жирару, близко стоящему къ нѣмецкой школѣ: см. *Albert Girard,* Invention nouvelle en l'Algèbre. Amsterd., 1629, fol 9 r.; равенство, стоящее въ пятой строкѣ сверху, означаетъ $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2000}$. Передъ этимъ Жираръ говоритъ о сравнительномъ достоинствѣ различныхъ обозначенiй корней (f. 7 r): „on pourra au lieu de $\sqrt{}$ marquer $\sqrt[2]{}$; & pour la racine cubique ou tierce, ainsi $\sqrt[3]{}$ ou bien $\left(\frac{1}{3}\right)$, ou biè... (какъ въ табл. стрк. 4), ce qui peut estre au choix, mais pour en dire mon opinion les fractions sont plus expresses & plus propres à exprimer en perfection, & $\sqrt[3]{}$ plus faciles et expedientes, comme $\sqrt[5]{32}$... Quoy que ce soit l'un & l'autre sont faciles à comprendre, mais.... (см. таблицу) sont pris pour facilité. — Жираръ отдаетъ предпочтенiе символамъ вида $\left(\frac{1}{3}\right)$ какъ болѣе совершеннымъ, но считаетъ болѣе легкимъ и удобнымъ употребленiе нѣмецкихъ радикаловъ. Знакъ = Жираръ употреблялъ для обозначенiя разности двухъ количествъ; т. е. $a = b$ означало для него $\pm(a - b)$ или $\pm a \mp b$.

Слѣдующiя затѣмъ обозначенiя принадлежатъ математикамъ итальянской школы.

Таблица

$$5\, p : R\, m : 15$$
$$5\, m : R\, m : 15$$
$$\overline{25\, m : m\ 15\ \bar{q}d.\ est\ 40}$$

заимствована у Кардана: *H. Cardani* Opus novum de proportionibus, praeterea Artis Magnae sive de Regulis algebra-

cis liber unus et item de Aliza Regula Liber etc. Basileae 1570; Artis Magnae lib. (Arithmeticae lib. X). Cap. XXXVII. De regula falsum ponendi. Regula II, Demonstratio, p. 131. Эта таблица даетъ произведенiе двухъ мнимыхъ биномовъ: $(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$.

Таблица

3
1. Eguale à 15. 1 p. 4.

5.		2.
5.		2.
25.		125.
5.		4.
125.	R.q.p.di m.	121.

Somme R.q.p.di m. 121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2. p.di m. 11. ⅃ R.c.L. 2. m. di m. 11. ⅃
Lato 2. p.di m. 1. 2. m. di m. 1.
Sommati fanno 4. che e la ualuta del Tanto.

представляетъ рѣшенiе уравненiя $x^3=15x+4$ по способу Бомбелли: *Bombelli*, Algebra, Libro secondo, p. 294. Слѣдуетъ замѣтить двойной знакъ L ⅃, замѣняющiй скобки; выраженiе, содержащее знакъ извлеченiя корня, сопровождаемый такими скобками, называется у Бомбелли radice legata; въ обозначенiяхъ другихъ итальянскихъ математиковъ ему соотвѣтствуетъ radix universalis со знакомъ *u* или *v* (ср. формулу Кардана, приведенную на стр. 244).

Таблицу слѣдуетъ читать такъ:

$$x^3=15x+4$$

5	2
5	2
25	125
5	4
125	$i\sqrt{121}$
$2+i\sqrt{121}$	$2-i\sqrt{121}$

$$\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$$

$$2+i+2-i=4$$

$$x=4.$$

Формулы

$$R^3.\ \underline{R^2.\ 49.\ \bar{m}\ R^2.\ 112.\ \bar{p}\ .\ 4},$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\sqrt{49}-\sqrt{112}+4};$$

$$R^2.\ \underline{3^4.\ \bar{m}.\ 24}\ \text{est egale a 8},$$

т. е.

$$\sqrt{3x^4-24}=8$$

принадлежатъ *Н. Шюке* (Triparty en la science des nombres, Bibl. Nat. Ms. Fonds Fr. № 1346, ff. 76 v., 108 r., ed. *Marre,* pp. 143, 181).

Математики англійской школы примыкаютъ къ нѣмецкимъ; но у англичанъ появились самостоятельныя обозначенія, которыя они присоединили къ нѣмецкимъ, знаки равенства и неравенства, точки для обозначенія пропорціи и вмѣсто скобокъ; нѣкоторые нѣмецкіе знаки они замѣнили итальянскими.

Oughtred (Clavis Mathematica denuo limata sive potius fabricata. Oxoniae, 1652, Cap. XVI. De Aequatione & de questionibus per Aequationem solvendis, p. 53) пишетъ еще:

$$\tfrac{1}{2}Z\pm\surd u:\tfrac{1}{4}Zq-Æ:(\tfrac{1}{2}X)=\frac{A}{E},$$

что означаетъ:

$$\tfrac{1}{2}Z+\ \text{или}\ -\sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2-A.E.}\ (\text{т. е. } \tfrac{1}{2}X)\ \text{равно}\ A\ \text{или}\ E,$$

т. е.

$$\tfrac{1}{2}Z+\sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2-A.E}=A$$
$$\tfrac{1}{2}Z-\sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2-A.E}=E$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}Z^2-A.E}=\tfrac{1}{2}X.$$

Обозначенія Валлиса (Algebra, 1685) уже гораздо совершеннѣе и мало отличаются отъ современныхъ.

Ньютонъ пишетъ формулу возвышенія въ степень бинома слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{P+PQ}\big|^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+$$
$$+\frac{m-3n}{5n}DQ+\&c.,$$

гдѣ A — первый членъ ряда, B — второй, C — третій, D — четвертый и т. д; см. Epistola *D. Isaaci Newtoni*... ad *D. Henricum Oldenburg*.... 13 Junii 1676 cum illustrissimo Viro *D. Godofredo Guilielmo Leibnitio*... communicanda, Commercium Epistolicum J. Collins et Aliorum de Analysi promota, etc., № 48, Ed. *Biot et Lefort*, Paris, 1856, p. 103; здѣсь, какъ и въ другихъ случаяхъ, горизонтальная черта надъ выраженіемъ замѣняетъ скобки; точно такъ же $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$ означаетъ $\frac{N}{\sqrt[3]{d+e}}$ (*ibid*., p. 104).

Прибавленіе 15.

Знакъ равенства у Рекорда.

Къ стр. 251.

Вотъ въ какихъ выраженіяхъ говоритъ Рекордъ о своемъ знакѣ равенства въ сочиненіи „*The Whetstone of Witte*“:

„I will sette as I doe often in woorkes use, a paire of parallels or Gemowe lines of one lengthe thus ═════, bicause noe. 2. thynges can be moare equalle“, т. е. „Я поставлю, подобно тому, какъ я часто поступаю въ своихъ трудахъ, пару параллельныхъ или двойничныхъ линій одинаковой длины такъ: ═════, ибо никакіе два предмета не могутъ быть болѣе равными“. [*Robert Recorde,* The Whetstone of Witte wiche is the seconde parte of Arithmetike. — The art of Coosike nombers. — The rule of equation, commonly called Algebers Rule (after the name of the inventour...) F. f. j. *verso*]. Въ приведенныхъ словахъ Рекорда можно усмотрѣть первые зачатки идеи о *геометрическомъ* равенствѣ отрѣзковъ.

Прибавленіе 16.

Къ исторіи сокращенныхъ обозначеній въ тригонометріи.

Къ стр. 260.

Плодотворная идея введенія *характеристическихъ* символовъ l, sin, cos, ..., какъ знаковъ *трансцендентныхъ операцій* надъ перемѣнными количествами и ихъ функціями, подобныхъ символамъ Лейбница $\int$ и d, принадлежитъ учи-

телю Эйлера Ивану Бернулли. См. *Pr. Calc. Expon.* Op., t. I, p. 181, Sol. d'un probl. conc. le calc. intégr. etc., t. I, pp. 393—400; письмо къ Эйлеру, Bas., 9 Dec. 1739, Correspondance mathém. et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle etc., publ. sous les auspices de l'Acad. Imp. d. Sciences de St. Pétersbourg, par *P. H. Fuss,* St. Pét. 1843, t. II, p. 29; *Jac. Bernoulli,* Opera, p. 777; *Act. Er. L.* 1697, Mai. Сокращенное обозначенiе для синуса встрѣчается уже у Ивана Бернулли въ Dissert. inaugur. de Motu Musc. (1694), Op., t. I, p. 100. Основанiя аналитической тригонометрiи — система формулъ, позволяющихъ связать однимъ общимъ алгориѳмомъ анализъ тригонометрическихъ и другихъ элементарныхъ функцiй — были предложены петербургскимъ академикомъ *Фридрихомъ Христiаномъ Майеромъ* въ 1727 г. Майеръ не разсматривалъ, однако, тригонометрическое исчисленiе, какъ часть общаго анализа, а имѣлъ въ виду, главнымъ образомъ, приложенiя къ сферической тригонометрiи; сокращенными обозначенiями тригонометрическихъ функцiй, какъ знаками *операцiй* надъ данными аргументами, онъ не пользовался, а употреблялъ лишь характерныя буквы вмѣсто тригонометрическихъ величинъ, e. g.: Si anguli acuti maioris sinus sit $= S$ et cosinus $= C$, anguli minoris sinus $= s$, et cosinus $= c$; dico fore sinum anguli ex duobus hisce acuti compositi $= \frac{Sc + Cs}{r}$, etc.". См. Commentarii Acad. Scient. Imper. Petropolitanae, Tom. II ad Ann. 1727, Petr., 1729, pp. 12—30 (прив. мѣсто 4, p. 13); Trigonometrica *F. C. Maieri.* Пользуясь, вѣроятно, тѣмъ, что было сдѣлано этими его предшественниками, Эйлеръ впервые составилъ полную аналитическую теорiю тригонометрическихъ функцiй и изложилъ ее въ *Introd. in An. Inf.*, art. 126—131.

Изъ англiйскихъ математиковъ первый ввелъ сокращенныя обозначенiя для тригонометрическихъ функцiй,— напоминающiя характеристическiе символы Лейбница и его послѣдователей, — *John Caswell.* Его тригонометрiя, подъ заглавiемъ A Brief (but full) Account of the Doctrine of Trigonometry, both plain and spherical — краткое (но полное) изложенiе ученiя о тригонометрiи какъ плоской, такъ и

сферической,— была напечатана въ Лондонѣ въ 1685 году въ приложеніи къ *Алгебрѣ* Валлиса, а въ латинскомъ переводѣ — вмѣстѣ съ этой *Алгеброй*, во II томѣ математическихъ сочиненій Валлиса, въ 1693 г. Вотъ образецъ обозначеній Касуелля:

$$\Sigma, A.\ \Sigma, B : \int, B.\ \int, A, \text{ т. е. } \operatorname{Cos} A : \operatorname{Cos} B = \operatorname{Sec} B : \operatorname{Sec} A.$$
$$S : \zeta - m \times S : \zeta - n : . S\zeta \times S : \zeta - B :: Rq . \tau q \tfrac{1}{2} \text{Ang, т. е.}$$
$$\operatorname{Sin}(\zeta - m) . \operatorname{Sin}(\zeta - n) : \operatorname{Sin}\zeta . (\operatorname{Sin}\zeta - B) = R^2 : \operatorname{Cotg}^2 \tfrac{1}{2} \text{ угла.}$$

Caswell обозначаетъ Sin A, Sec A, tg A, Sinvers A черезъ S,A; $\int,A$; τ,A; V,A; Cos A, Cosec A, Cotg A, Sinvers. compl. черезъ Σ,A; σ,A; τ,A; v,A соотвѣтственно (см. l. c., pp. 1, 3, 14).

Какъ видно изъ замѣчанія къ 314 стр. *Алгебры*, въ которой Валлисъ говоритъ о другой, полученной имъ работѣ *Касуэлля* (A Treatise of Algebra both historical and practical, by *J. Wallis*, London, 1685, p. 166) — *John Caswell* былъ Vice-Principal въ *Хартъ-холлѣ* (Hart-hall) въ *Оксфордѣ* (ср. мою замѣтку въ *Зап. Мат. Отд. Новорос. Общ. Естествоисп.*, т. XIX, 1899 г. и *A. von Braunmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, Zweiter Theil, Lpzg., 1903, pp. 46, sqq., *Biblioth. Mathem.*, 3 Folge, 1 Bd., 1900, p. 70. — Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie). Въ VIII главѣ своего трактата *De Sectionibus Angularibus*, напечатаннаго вмѣстѣ съ *Алгеброй* во II-мъ томѣ собранія сочиненій (Opera, t. II, 591, 592), Валлисъ даетъ составленную имъ по просьбѣ *Джона Коллинса* таблицу формулъ, связывающихъ различныя тригонометрическія линіи: эти линіи обозначаетъ онъ тѣми же буквами, что и Caswell, но не сопровождаетъ ихъ обозначеніями угла, пользуясь ими совершенно такъ же, какъ и Майеръ, такъ:

$$S = V : R^2 - \Sigma^2 = \frac{\Sigma T}{R} = \frac{T}{R} V : R^2 - S^2 = \frac{TR}{\int} = \frac{TR}{V : R^2 + T^2} \text{ и т. д.,}$$

гдѣ R, конечно, радіусъ. Въ VIII главѣ англійскаго подлинника Валлисова трактата A Treatise of Angular Sections, напечатаннаго въ 1684 году, нѣтъ этой таблицы. Поэтому нужно предположить, что Валлисъ заимствовалъ свои обозначенія у Касуэлля, а не наоборотъ, какъ полагалъ *фонъ*

Браунмюль, который не видалъ англійскаго подлинника *Алгебры* и думалъ даже сначала, что *Тригонометрія* Касуэлля была написана около 1690 г. (*Bibl. Math.*, l. c., p. 70).

Приложеніе 17.

О теоріи пропорцій.

Къ стр. 310.

Теорія отношеній и пропорцій можетъ быть разсматриваема съ четырехъ точекъ зрѣнія, сообразно съ чѣмъ могутъ быть четыре способа изложенія этой теоріи.

1. Теорія отношеній величинъ вообще, основанная на такъ называемомъ Архимедовомъ постулатѣ (*Stolz*, Innsbruck Ber. 12 (1882 г.), p. 75, Mathem. Ann., 22 (1883), p. 504): *разность двухъ однородныхъ величинъ можно повторить столько разъ, что полученная сумма превзойдетъ каждую изъ двухъ данныхъ величинъ.* (См. Archimedi l. de quadrat. parab., ed. *Heib.*, v. II, p. 296. De Sphaera et Cyl., l. I, post. 5, ed. *Heib.*, v. I, p. 10). Постулатъ этотъ встрѣчается еще у Аристотеля (Phys. ausc., l. VIII); Евклидъ нѣсколько видоизмѣняетъ его и придаетъ ему форму опредѣленія (Elem., V, def. 4): „Величины называются имѣющими отношеніе одна къ другой, кои будучи взяты кратно, могутъ быть больше одна другой“. (*Петруш.*, Эвкл. нач. кн. V, опр. 4, стр. 164). Такого рода общая теорія величинъ изложена въ V книгѣ Евклидовыхъ началъ.

2. Ариѳметическая теорія отношеній, связанная съ ученіемъ о вещественныхъ числахъ вообще (раціональныхъ и ирраціональныхъ), требующая, кромѣ постулата Архимеда, еще другого допущенія, извѣстнаго подъ названіемъ „Канторова постулата непрерывности“. (*Georg Cantor*, Math. Ann., 5 (1871), p. 121): *если есть два безконечныхъ ряда однородныхъ величинъ, изъ коихъ первыя возрастаютъ, а вторыя убываютъ, такъ что разность между двумя соотвѣтствующими членами обоихъ рядовъ стремится къ нулю, то существуетъ величина того же рода, которая больше всѣхъ величинъ перваго ряда и меньше всѣхъ величинъ второго ряда.* Два постулата непрерывности, Архимедовъ и Канто-

ровъ, даютъ возможность обоснованія *общей* ариѳметической теоріи величинъ; они даютъ всему анализу общее реальное содержаніе и внѣшнее единство всему ученію о величинахъ. Чтобы придать также общее значеніе Евклидовой теоріи, нужно дополнить ее соотвѣтствующими постулатами, постулатомъ Кантора или его эквивалентомъ. Средневѣковые комментаторы Евклида вводили съ этой цѣлью новыя аксіомы въ его начала. Такова аксіома *Кампана* или *Адельгарда* о существованіи четвертой пропорціональной къ тремъ даннымъ: „Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam eiusdem generis: tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam eiusdem generis". См. *Campani* Opus element. Euclidis Megar. Venetiis, 1482, p. 2; ср. *H. Weissenborn*, Die Uebersetz. des Euklid aus dem arabischen i. d. lat. durch Adelhard von Bath etc. Abhandl. z. Gesch. d. Math., 3 Heft, 1880, pp. 149, 150. Кампанъ самъ указываетъ связь своей аксіомы съ непрерывностью: „In quantitatibus continuis hoc universaliter verum est etc". Изложеніе ариѳметической теоріи отношеній читатель найдетъ въ *Общей Ариѳметикѣ* Штольца (*O. Stolz*. Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik, Lpzg, 1885, I Th., 13, pp. 121—124). Тамъ же изложена и общая теорія пропорцій въ духѣ Евклида: VI Abschnitt. Theorie der Verhältnisse nach Euclid, pp. 84—96; въ § 6 дано доказательство предложенія Кампана, основанное на аксіомахъ непрерывности (pp. 92—93); о значеніи этого предложенія см. *тамъ же*, p. 336.

3. Можно разсматривать самое число, какъ отношеніе двухъ однородныхъ величинъ. „Подъ числомъ", говоритъ Ньютонъ (*Arithm. Universalis*, p. 2) „мы разумѣемъ не столько собраніе единицъ, сколько отвлеченное отношеніе какого-нибудь количества къ другому, однородному съ нимъ количеству, принятому за единицу". Пользуясь аксіомами непрерывности, можно обобщить такимъ образомъ ариѳметику, распространивъ ее на отношенія несоизмѣримыхъ величинъ. Несоизмѣримыя числа можно тогда разсматривать, какъ *предѣлы* соизмѣримыхъ. Главныя положенія такой теоріи намѣчены Дюгамелемъ (Éléments de Calc. infinitésimal, T. I, 15, Remarque). Строгое изложеніе такой теоріи

представляетъ тѣ же трудности, что и теоріи Евклидова и ариѳметическая. Говоря объ исторіи Евклидова ученія о пропорціяхъ, Ганкель замѣчаетъ: „съ тѣхъ поръ, какъ забыто и оставлено Евклидово изложеніе, его замѣняютъ недостаточными суррогатами" (*Hankel*, p. 404). Такой „суррогатъ" по отношенію къ теоріи Дюгамеля представляетъ изложеніе Руше и Комберусса (см. *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse*, Traité de Géométrie, 1-re partie, note I).

4. Декартъ (*Géometrie*, Livre I, Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que qes Cercles & des Lignes droites, pp. 3, 4; cp. *Discours de la méthode*, 2-e partie, Oeuvres de D., ed. *J. Simon*, Paris, 1857, pp. 13—14) вмѣсто ариѳметической алгебры своихъ предшественниковъ ввелъ *линейную* алгебру, подчиненную тѣмъ же формальнымъ законамъ, но основанную на дѣйствіяхъ надъ прямолинейными отрѣзками, производимыхъ посредствомъ геометрическихъ построеній. Такъ, умножить BD на BC — значитъ отложить на одной сторонѣ нѣкотораго угла отрѣзокъ BD и отрѣзокъ AB, принятый за единицу, на другой — отрѣзокъ BC, соединить A съ C и провести изъ D прямую, параллельную AC, до встрѣчи съ другой стороной угла въ точкѣ E; отрѣзокъ BE и есть произведеніе BD на BC. Такая линейная алгебра, очевидно, не зависитъ отъ постулатовъ непрерывности.

Въ послѣднее время было сдѣлано много попытокъ сдѣлать геометрію независимой отъ общихъ ариѳметическихъ теорій; математикамъ удалось, такимъ образомъ, выработать *чисто геометрическую теорію* прямолинейныхъ отрѣзковъ. Въ основаніе такой теоріи могутъ быть положены слѣдующія геометрическія предложенія:

а) О пропорціональности отрѣзковъ, образуемыхъ на сторонахъ угла параллельными прямыми, какъ у Декарта.

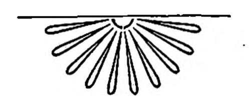
б) Равновеликость двухъ треугольниковъ, или параллелограммовъ, имѣющихъ общій уголъ, заключенный между обратно пропорціональными сторонами.

Одно изъ этихъ предположеній можетъ быть принято за *опредѣленіе* пропорціональности отрѣзковъ, расположенныхъ на сторонахъ угла или составляющихъ стороны двухъ треугольниковъ. Основныя свойства пропорцій бу-

дутъ поставлены тогда въ зависимость отъ предложеній, относящихся къ параллельнымъ линіямъ или равновеликости площадей.

Свѣдѣнія о различныхъ работахъ, относящихся къ этому вопросу, читатель найдетъ въ Encyclopädie der Mathemat. Wissenschaften, Bd. III 1, Heft 1, Lpzg., 1907; Prinzipien der Geometrie von *F. Enriques*, 11. Neue Entwicklungen zur Proportionentheorie im Sinne der Alten, pp. 52 — 56.

Наиболѣе совершенной является теорія Гильберта, основанная на свойствахъ отрѣзковъ, образуемыхъ параллельными прямыми (*D. Hilbert.* Grundlagen der Geometrie, 2-te Aufl., 1903, глава III, Die Lehre von den Proportionen, pp. 24 — 39, ср. *ibid.* Cap. VI). Теорія пропорцій по Гильберту введена въ новѣйшее руководство по элементарной геометріи: Die Elemente der Geometrie, bearb. v. *H. Thieme* (Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer, II Th., I Bd.), Lpzg. 1909.



УКАЗАТЕЛЬ



